Instituto Superior Técnico - Álgebra Linear - 2^o Semestre 2010/2011

LEAN - LEMat - MEAer - MEMec

1^a Ficha de exercícios para as aulas de problemas

1. Verifique que:

(i) $\begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{1000} = I$ **(iii)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^2 = -I$

(iv) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{222} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{220} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(v)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

(vi) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(vii)** $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

(viii) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **(ix)** $3\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$

(x) $\left(\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\right)^T - 2\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 2 \\ -3 & \sqrt{2} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -7 & -2\sqrt{2}-11 \\ 9 & 2\sqrt{2}+10 \end{bmatrix}$

(xi) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ (se $ad - bc \neq 0$)

A 2^a coluna de $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 2 & 9 \\ -7 & 1 & 6 \\ 9 & 1 & -7 \end{bmatrix}$ é $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

(xiii) $\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ é ortogonal ($\theta \in \mathbb{R}$). Isto é,

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = I$$

(xiv) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}$ é ortogonal. **(xv)** $\begin{bmatrix} \frac{1}{2}-\frac{2}{3}i & \frac{2}{3}i \\ -\frac{2}{3}i & -\frac{1}{3}-\frac{2}{3}i \end{bmatrix}$ é unitária. Isto é,

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}-\frac{2}{3}i & \frac{2}{3}i \\ -\frac{2}{3}i & -\frac{1}{3}-\frac{2}{3}i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}-\frac{2}{3}i & \frac{2}{3}i \\ -\frac{2}{3}i & -\frac{1}{3}-\frac{2}{3}i \end{bmatrix}^H = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}-\frac{2}{3}i & \frac{2}{3}i \\ -\frac{2}{3}i & -\frac{1}{3}-\frac{2}{3}i \end{bmatrix}^H\begin{bmatrix} \frac{1}{2}-\frac{2}{3}i & \frac{2}{3}i \\ -\frac{2}{3}i & -\frac{1}{3}-\frac{2}{3}i \end{bmatrix} = I$$

(xvi) $\begin{bmatrix} 2-3i & 1 \\ -i & 1-2i \end{bmatrix}$ é uma matriz normal. Isto é,

$$\begin{bmatrix} 2-3i & 1 \\ -i & 1-2i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2-3i & 1 \\ -i & 1-2i \end{bmatrix}^H = \begin{bmatrix} 2-3i & 1 \\ -i & 1-2i \end{bmatrix}^H\begin{bmatrix} 2-3i & 1 \\ -i & 1-2i \end{bmatrix}$$

(xvii) As constantes a, b e c que definem a função $y = ax^2 + bx + c$ cujo gráfico passa pelos pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ e (x_3, y_3) (de abcissas distintas entre si), constituem a solução $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ do sistema linear cuja matriz aumentada é dada por: $\left[\begin{array}{ccc|c} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \end{array}\right]$.

2. Efectue, sempre que possível, as seguintes operações.

(i) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -\pi \end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ **(iii)** $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 2 & 4 \\ -3 & \sqrt{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(iv) $2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}-\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ **(v)** $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ **(vi)** $\begin{bmatrix} -2 & \sqrt{3} & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

(vii) $\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$ **(viii)** $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix}2\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -3 \end{bmatrix}\right)^T$

(ix) $\left(2\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \frac{8}{9} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{5}{3} & 1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}\right)^T$

(x) $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 6 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \\ -\frac{1}{3} & -3 \end{bmatrix}$ **(xi)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \\ -\frac{1}{3} & -3 \end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 6 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

3. Pretende-se arrumar livros em caixas. Ao colocar 7 livros em cada caixa, fica um livro de fora. Ao colocar 8 livros por caixa, há uma caixa que só tem 1 livro. Quantos livros se pretende arrumar? Quantas caixas existem?

4. C = Celsius, F = Fahrenheit. A partir do ponto de congelação $(C, F) = (0, 32)$ e do ponto de ebulição $(C, F) = (100, 212)$, deduza a equação linear

$$F = \frac{9}{5}C + 32.$$

Verifique que o único valor comum a ambas as escalas é $-40°$.

5. Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{4\times 4} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ em cada um dos seguintes casos:

a) $a_{ij} = j^2(-1)^{i+j}$ **b)** $a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad i > j \\ \frac{1}{i+j-1} & \text{caso contrário,} \end{cases}$

c) $\begin{cases} i & \text{se} \quad i = j \\ -j & \text{se} \quad j = i+1 \\ i-j & \text{caso contrário,} \end{cases}$ **d)** $a_{ij} = \begin{cases} -a_{ji} & \text{para todo} \quad i, j \\ j & \text{se} \quad j > i \end{cases}$

6. Verifique se a matriz $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por $a_{ij} = 3i + 2j$, para todo $i, j = 1, 2$, é simétrica.

7. Determine as características e as nulidades das seguintes matrizes reais, identificando os respectivos pivots.

(i) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ **(iii)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ **(iv)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ **(vi)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 7 & -1 & 9 & 8 \\ 3 & 3 & -2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$ **(vii)** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

(viii) $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ **(ix)** $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ **(x)** $\begin{bmatrix} 2 & 10 & -6 & 8 & -4 \\ -1 & -5 & 3 & -4 & 2 \\ -2 & -10 & 6 & -8 & 4 \end{bmatrix}$

8. Quais das seguintes equações são equações lineares em x, y e z ?

(a) $\pi^3 x + \sqrt{3}y + z = 1$ **(b)** $\frac{1}{2}x + z = 0$ **(c)** $x^{-1} + 3y - z = 2$ **(d)** $x - yz = 1$

9. Diga qual dos seguintes pontos: $(0,0), (1,1), (1,-1), (-1,1)$ é a solução do seguinte sistema de equações lineares nas variáveis x, y.

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = 3 \\ x - y = 2. \end{cases}$$

10. Diga quais dos seguintes pontos: $(0,0,0,0), (1,-1,1,0), (1,-1,1,2), \left(3, -9, 7, \frac{\sqrt[3]{\pi}}{2}\right)$ são soluções do sistema de equações lineares nas variáveis x, y, z e w.

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 0 \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

11. **(i)** Determine os coeficientes a, b, c e d da função polinomial $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, cujo gráfico passa pelos pontos $P_1 = (0,10), P_2 = (1,7), P_3 = (3,-11)$ e $P_4 = (4,-14)$.

(ii) Determine os coeficientes a, b e c da equação da circunferência

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

que passa pelos pontos $P_1 = (-2,7), P_2 = (-4,5)$ e $P_3 = (4,-3)$.

12. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Em função do parâmetro α, calcule a característica e a nulidade das seguintes matrizes. Em cada alínea, indique ainda (se existirem), justificando, os valores de α para os quais essas matrizes são invertíveis.

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2-\alpha & -1 \end{bmatrix}$ **(iii)** $\begin{bmatrix} 2 & \alpha^2 & -\alpha \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha^2 - 1 & \alpha + 1 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & \alpha & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ **(v)** $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -\alpha^2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ **(vi)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & \alpha & 0 \\ 1 & \alpha & -1 & 0 \\ 1 & -1 & \alpha^3 & 0 \\ -1 & 1 & -\alpha & \alpha^2 - 1 \end{bmatrix}$

13. Resolva os seguintes sistemas de equações lineares.

(a) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5x + 7y = 3 \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 3x + 6y = 15 \end{cases}$ **(c)** $\begin{cases} 4x - 2y = 5 \\ -6x + 3y = 1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2x + y - 3z = 5 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \\ 5x - 3y - z = 16 \end{cases}$ **(e)** $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 5 \\ x - 2y + 3z = 2 \\ 4x - y + 4z = 1 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 2x + 3y + 8z = 4 \\ 3x + 2y + 17z = 1 \end{cases}$ **(g)** $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ x - 2y = 5 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} x + 2y - z + 3w = 3 \\ 2x + 4y + 4z + 3w = 9 \\ 3x + 6y - z + 8w = 10 \end{cases}$ **(i)** $\begin{cases} x + 5y + 4z - 13w = 3 \\ 3x - y + 2z + 5w = 2 \\ 2x + 2y + 3z - 4w = 1 \end{cases}$

(j) $\begin{cases} 2x_3 + 3x_4 = 4 \\ 2x_1 - 6x_3 + 9x_4 = 7 \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 4 \\ 100x_2 + 150x_3 - 200x_4 = 50 \end{cases}$ **(k)** $\begin{cases} x - 2y + 3z - w = 1 \\ 3x - y + 2z + 5w = 2 \\ -3x + 6y - 9z + 3w = -6 \end{cases}$

14. Discuta em função do parâmetro real α os seguintes sistemas de equações lineares (nas variáveis x, y e z). Nos casos em que existirem soluções, determine-as.

(a) $\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ x + y + \alpha z = 1 \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} x + 2y + \alpha z = 1 \\ 2x + \alpha y + 8z = 3 \end{cases}$ **(c)** $\begin{cases} x + y + \alpha z = 2 \\ 3x + 4y + 2z = \alpha \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = \alpha \\ x + y + \alpha z = \alpha^2 \end{cases}$ **(e)** $\begin{cases} -x + y + \alpha z = 1 \\ 2x + \alpha y - 2\alpha z = \alpha \\ -\alpha x + \alpha y + z = -1 + 2\alpha \end{cases}$

15. Discuta os seguintes sistemas de equações lineares em termos dos parâmetros reais α e β. Nos casos em que existirem soluções, determine-as.

(a) $\begin{cases} x + 4y + 3z = 10 \\ 2x + 7y - 2z = 10 \\ x + 5y + \alpha z = \beta \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} 2z + \alpha w = \beta \\ x + y + z + 3w = 1 \\ 2x + 2y + z + w = 2 \\ x + y + 3z + 14w = 4 \end{cases}$ **(c)** $\begin{cases} \alpha x + y - z + \alpha w = 0 \\ x - 2y + 2z + w = 1 \\ x - y + z + (\alpha + 1) w = \beta \end{cases}$

16. Diga para que valores de a, b e c têm soluções os sistemas.

(a) $\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 3x - y + 2z = b \\ x - 5y + 8z = c \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} x - 2y + 4z = a \\ 2x + 3y - z = b \\ 3x + y + 2z = c \end{cases}$

17. Determine um sistema de equações lineares cujo conjunto de soluções seja:

(a) $S = \{(1 + t, 1 - t) : t \in \mathbb{R}\}$ **(b)** $S = \{(t, 1 - 2t, 1) : t \in \mathbb{R}\}$

(c) $S = \{(3t, 2t, t) : t \in \mathbb{R}\}$

(d) $S = \{(3t - s, t + 2s - 1, s - 2t + 1) : s, t \in \mathbb{R}\}$

(e) $S = \{(2t - 3s, t + s - 1, 2s + 1, t - 1) : s, t \in \mathbb{R}\}$

(f) $S = \{(1 - s, s - t, 2s, t - 1) : s, t \in \mathbb{R}\}$ **(g)** $S = \varnothing$

18. Determine todas as matrizes reais 2×2 que comutam com a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

19. Existem 16 matrizes 2×2 só com 0 e 1 nas respectivas entradas. Quantas são invertíveis?

20. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^2 + 2A + 2I = \mathbf{0}$.Verifique que A é invertível e determine a sua inversa.

21. Sejam $A, B, X \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrizes invertíveis tais que $(AB)^2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$. Em cada um dos seguintes casos, determine a matriz X que satisfaz a equação

    (i) $AXB + AB = \mathbf{0}$ **(ii)** $BXA - A^{-1}B^{-1} = \mathbf{0}$

22. Determine $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $\left(2I - (3A^{-1})^T\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$.

23. Determine (se existirem) as inversas das seguintes matrizes.

    (i) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(iii)** $[1]$ **(iv)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

    (v) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ **(vi)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(vii)** $\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

    (viii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ **(ix)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 1 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ **(x)** $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

    (xi) $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}$, com $k \neq 0$ **(xii)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, com $k_1, k_2, k_3, k_4 \neq 0$

    (xiii) $\begin{bmatrix} \frac{5}{13} & \frac{2}{13} & \frac{2}{13} & -\frac{8}{13} \\ \frac{2}{13} & -\frac{7}{13} & \frac{6}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{6}{13} & -\frac{7}{13} & \frac{2}{13} \\ -\frac{8}{13} & \frac{2}{13} & \frac{2}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix}$ **(xiv)** $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

24. **(i)** Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que
$$A^k = \mathbf{0}$$
para algum $k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$. Verifique que
$$(I - A)^{-1} = I + A + ... + A^{k-1}$$

    (ii) Calcule $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$.

25. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$.

(i) Verifique que $A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **(ii)** Calcule $(I - A)(I + A + A^2)$.

26. Para cada parâmetro real α, considere o sistema de equações lineares de variáveis reais cuja matriz aumentada é dada por:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 10 \\ 2 & 7 & 2 & 20 \\ 1 & 5 & \alpha & 10 \end{array}\right].$$

a) Discuta em termos de α a existência ou não de solução do sistema de equações lineares anterior.

b) Para $\alpha = 4$, determine o conjunto solução do sistema de equações lineares correspondente.

27. Seja $A_{\lambda,\mu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & \lambda^2+\mu & \lambda\mu \\ 0 & 1 & \lambda & \mu \\ 1 & \lambda & \lambda^2+\mu & \lambda+\lambda\mu \end{bmatrix}$, com $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(a) Determine a característica e a nulidade de $A_{\lambda,\mu}$ em função de λ e μ.

(b) Determine os valores dos parâmetros λ e μ para os quais $A_{\lambda,\mu}$ é invertível.

28. Seja $A_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta & 2 \\ 2 & \beta & \beta^2 & 4 \\ -4 & 0 & -\beta^3 & -8 \\ \beta & 0 & \beta^2 & \beta^2 \end{bmatrix}$, com $\beta \in \mathbb{R}$.

(a) Determine a característica e a nulidade de A_β em função do parâmetro β e diga, justificando, quais são os valores de β para os quais A_β é invertível.

(b) Para $\beta = 1$, determine a inversa da matriz A_1.

29. Seja $B_{a,b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & b \\ 3 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Determine a característica e a nulidade de $B_{a,b}$ em função de a e b.

(b) Para $a = 1$ e $b = 0$ calcule a matriz inversa da matriz $B_{1,0}$, isto é, $(B_{1,0})^{-1}$.

(c) Determine a solução geral do sistema linear $B_{1,0}X = C$, $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}^T$.

(d) Para $b = 1$, determine a solução geral do sistema linear $B_{a,1}X = D$, em que D é o simétrico da 3^a coluna de $B_{a,1}$.