Instituto Superior Técnico - Álgebra Linear - 2^o Semestre 2010/2011

LEAN - LEMat - MEAer - MEMec

3^a Ficha de exercícios para as aulas de problemas

1. Verifique que os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, com as operações usuais, não são subespaços de $\mathbb{R}^2$.

   (i) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ **(ii)** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$ **(iii)** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$

2. Verifique que os seguintes conjuntos, com as operações usuais, são (todos os) subespaços de $\mathbb{R}^2$.

   (i) $\{(0,0)\}$ **(ii)** $V_k = \{(x, kx) : x \in \mathbb{R}\}$ com $k \in \mathbb{R}$

   (iii) $U = \{(0,a) : a \in \mathbb{R}\}$ **(iv)** $\mathbb{R}^2$

3. No espaço linear $\mathbb{R}^3$, considere o subconjunto $U_k = \{(x,y,k) : x, y \in \mathbb{R}\}$ onde k é uma constante real. Determine os valores de k para os quais U_k é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

4. Considere o espaço linear $V = \mathbb{R}^3$. Diga quais dos seguintes subconjuntos de V, com as operações usuais, são subespaços de V e indique os respectivos conjuntos geradores.

   (i) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2\}$ **(ii)** $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$

   (iii) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$ **(iv)** $\{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$

   (v) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2x \text{ e } z = 3x\}$ **(vi)** $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 1\}$

   (vii) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \text{ e } x - y - z = 0\}$

   (viii) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y \text{ ou } y = z\}$

   (ix) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0 \text{ e } 2y + z = 0\}$ **(x)** $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}$

5. Seja $\mathcal{P}_n$ o espaço linear de todos os polinómios reais de variável real e de grau menor ou igual a n, com as operações usuais. Diga quais dos seguintes subconjuntos de $\mathcal{P}_2$, com as operações usuais, são subespaços de $\mathcal{P}_2$ e indique os respectivos conjuntos geradores.

   (i) $\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_0 = 0\}$ **(ii)** $\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 = 2a_0 \; e \; a_1 = 0\}$

   (iii) $\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_1 = 1\}$ **(iv)** $\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 - a_1 = 2\}$

   (v) $\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 - a_1 + 2a_0 = 0\}$

6. Seja $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ o espaço linear de todas as matrizes do tipo $m \times n$ com entradas reais. Diga quais dos seguintes subconjuntos de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, com as operações usuais, são subespaços de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ e indique os respectivos conjuntos geradores.

   (i) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) : b = a + c \right\}$ **(ii)** $\left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & 0 & f \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) : b < 0 \right\}$

   (iii) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) : a = -2c \text{ e } f = 2e + d \right\}$.

7. Determine o espaço das colunas, o espaço das linhas e o núcleo das seguintes matrizes.

(i) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(iii)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(iv)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **(vi)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ **(vii)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(viii)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

8. Verifique que, com as operações usuais, o seguinte conjunto de matrizes

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

gera o subespaço $\left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \\ 0 & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}) : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ do espaço linear $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$.

9. Considere, no espaço linear $\mathbb{R}^3$, os vectores $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (1, 0, 2)$ e $v_3 = (1, 1, 0)$. Mostre que os seguintes vectores são combinações lineares de v_1, v_2 e v_3.

(i) $(3, 3, 0)$ **(ii)** $(2, 1, 5)$ **(iii)** $(-1, 2, 0)$ **(iv)** $(1, 1, 1)$

10. Considere, no espaço linear $\mathbb{R}^4$, os vectores $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (1, -1, 0, 0)$ e $v_3 = (0, 1, 2, 1)$. Diga quais dos seguintes vectores pertencem ao subespaço $L(\{v_1, v_2, v_3\})$.

(i) $(-1, 4, 2, 2)$ **(ii)** $(2, 0, 2, 2)$ **(iii)** $(1, 1, -2, 2)$ **(iv)** $(0, 1, 1, 0)$

11. Determine o valor de k para o qual o vector $u = (1, -2, k) \in \mathbb{R}^3$ é combinação linear dos vectores

$$v = (3, 0, -2) \quad \text{e} \quad w = (2, -1, -5).$$

12. Considere, no espaço linear $\mathcal{P}_2$, os vectores $p_1(t) = 2 + t + 2t^2$, $p_2(t) = -2t + t^2$, $p_3(t) = 2 - 5t + 5t^2$ e $p_4(t) = -2 - 3t - t^2$. O vector

$$q(t) = 2 + t + t^2$$

pertence à expansão linear $L(\{p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t)\})$? Podem os vectores $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ e $p_4(t)$ gerar $\mathcal{P}_2$?

13. Verifique que os seguintes conjuntos de vectores geram $\mathbb{R}^3$.

(i) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ **(ii)** $\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$

(iii) $\{(1, 1, 1), (-1, 1, -1), (1, -1, -1), (-1, -1, 1)\}$

14. Escreva a matriz $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ como combinação linear das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Encontre uma matriz 2×2 que não pertença a

$$L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

Antes de a determinar, explique porque é que essa matriz existe.

15. Determine os vectores (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$ que pertencem a $L(\{u, v, w\})$ onde

$$u = (2, 1, 0), \quad v = (1, -1, 2) \quad \text{e} \quad w = (0, 3, -4).$$

16. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 13 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Verifique que o espaço das linhas de A é igual ao espaço das linhas de B. Conclua então que os espaços das colunas de A^T e de B^T são iguais.

17. Encontre um conjunto de geradores para cada um dos seguintes subespaços do espaço linear $\mathbb{R}^4$.

(i) $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 0 \ \text{ e } \ y + z = 0\}$

(ii) $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0\}$

(iii) $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y - z = 0 \ \text{ e } \ x + y + 2w = 0 \ \text{ e } \ y - z + w = 0\}$

18. Defina por meio de sistemas de equações homogéneas os seguintes subespaços.

(i) Em $\mathcal{P}_2$: $L(\{1 - t^2, 1 + t\})$ **(ii)** $L(\{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (-2, 1, -2)\})$

(iii) $L(\{(0, 1, 0), (-2, 1, -2)\})$ **(iv)** $L(\{(1, 1, 2), (2, 1, 1)\})$ **(v)** $L(\{(1, 0, -1, 1)\})$

(vi) $L(\{(1, -2, 5, -3), (2, -4, 6, 2), (3, -6, 11, -1), (0, 0, 1, -2)\})$

19. Determine as condições que os parametros $\alpha_i, \beta_i (i = 1, 2)$ devem verificar para que os vectores $(\alpha_1, \beta_1, 3)$ e $(\alpha_2, \beta_2, 9)$, no espaço linear $\mathbb{R}^3$, sejam linearmente independentes.

20. Diga se os seguintes conjuntos de vectores em $\mathbb{R}^3$ são linearmente dependentes ou linearmente independentes? Nos casos em que sejam linearmente dependentes, indique (para cada um) um subconjunto linearmente independente com o maior n^o possível de elementos e escreva os restantes como combinação linear desses vectores.

(i) $\{(4, 2, 1), (2, 6, -5), (1, -2, 3)\}$ **(ii)** $\{(1, 2, -1), (3, 2, 5)\}$

(iii) $\{(1, 2, 3), (1, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ **(iv)** $\{(1, 0, -1), (0, 0, 0), (0, 1, 1)\}$

(v) $\{(1, 1, 0), (0, 2, 3), (1, 2, 3), (x, y, z)\}$ (com $x, y, z \in \mathbb{R}$).

21. Determine todos os valores de a para os quais $\{(a^2, 0, 1), (0, a, 2), (1, 0, 1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

22. Sejam $U = L(\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0)\})$ e $V_k = L(\{(2, k, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\})$ subespaços de $\mathbb{R}^4$. Determine os valores de k para os quais $\dim(U \cap V_k) = 1$.

23. No espaço linear $\mathbb{R}^3$, construa uma base que inclua os vectores:

    (i) $(1,0,2)$ e $(0,1,2)$. **(ii)** $(2,-1,1)$ e $(-4,2,1)$. **(iii)** $(-1,2,1)$ e $(1,0,-1)$.

24. Verifique que os seguintes subconjuntos do espaço linear de todas as funções reais de variável real são linearmente dependentes. Indique (para cada um) um subconjunto linearmente independente com o maior n^o possível de elementos e escreva os restantes como combinação linear desses vectores.

    (i) $S = \{\cos^2 t, \operatorname{sen}^2 t, \cos 2t\}$ **(ii)** $S = \{2, \operatorname{sen}^2 t, \cos^2 t\}$

    (iii) $S = \{e^t, e^{-t}, \cosh t\}$ **(iv)** $S = \left\{1, t, t^2, (t+1)^2\right\}$

    Determine uma base para cada subespaço $L(S)$ e calcule a respectiva dimensão.

25. Seja V o espaço linear de todas as funções reais de variável real. Sejam $f, g, h \in V$, com $f(t) = \operatorname{sen} t$, $g(t) = \cos t$ e $h(t) = t$. Mostre que o conjunto $\{f, g, h\}$ é linearmente independente.

26. Diga quais dos seguintes conjuntos de vectores são bases de $\mathbb{R}^2$. Caso não sejam bases, determine subconjuntos desses conjuntos que sejam bases e as dimensões dos espaços gerados por cada um desses subconjuntos. Em cada base de $\mathbb{R}^2$ encontrada, exprima o vector $(0,-1)$ como combinação linear dos vectores dessa base ordenada. Isto é, determine as coordenadas do vector $(0,-1)$ em cada base ordenada encontrada. Relativamente a cada base ordenada de $\mathbb{R}^2$, determine ainda o vector cujas coordenadas são $(0,-1)$.

    (i) $\{(1,3),(1,-1)\}$ **(ii)** $\{(0,0),(1,2)\}$ **(iii)** $\{(2,4)\}$

    (iv) $\{(-5,0),(0,2)\}$ **(v)** $\{(1,2),(2,-3),(3,2)\}$ **(vi)** $\{(1,0),(0,1)\}$

27. Diga quais dos seguintes conjuntos de vectores são bases de $\mathbb{R}^3$. Caso não sejam bases, determine subconjuntos desses conjuntos que sejam bases e as dimensões dos espaços gerados por cada um desses subconjuntos. Em cada base de $\mathbb{R}^3$ encontrada, exprima o vector $(-1,1,-2)$ como combinação linear dos vectores dessa base ordenada. Isto é, determine as coordenadas do vector $(-1,1,-2)$ em cada base ordenada encontrada. Relativamente a cada base ordenada de $\mathbb{R}^3$, determine ainda o vector cujas coordenadas são $(-1,1,-2)$.

    (i) $\{(1,2,3),(0,0,0),(0,1,2)\}$ **(ii)** $\{(1,2,0),(0,1,-1)\}$

    (iii) $\{(3,2,2),(-1,2,1),(0,1,0)\}$ **(iv)** $\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$

    (v) $\{(1,1,-1),(2,3,4),(4,1,-1),(0,1,-1)\}$ **(vi)** $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

28. Diga quais dos seguintes conjuntos de vectores são bases de $\mathbb{R}^4$. Caso não sejam bases, determine subconjuntos desses conjuntos que sejam bases e as dimensões dos espaços gerados por cada um desses subconjuntos. Em cada alínea indique uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclua pelo menos dois vectores do conjunto apresentado.

    (i) $\{(1,0,0,1),(0,1,0,0),(1,1,1,1),(0,1,1,1)\}$

    (ii) $\{(1,-1,0,2),(3,-1,2,1),(1,0,0,1)\}$

    (iii) $S = \{(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,0,1),(1,0,1,0),(0,0,1,1)\}$

(iv) $\{(1,0,0,2),(1,0,2,0),(1,2,0,0),(3,0,0,0)\}$

(v) $\{(1,-2,5,-3),(2,-4,6,2),(3,-6,11,-1),(0,0,5,5)\}$

(vi) $S = \{(2,1,-1,2),(-1,-1,1,2),(4,-2,2,-2),(5,-2,2,2)\}$. Nesta alínea, verifique que $(8,-3,3,5) \in L(S)$ e determine uma base de $L(S)$ que inclua o vector $(8,-3,3,5)$.

29. Diga quais dos seguintes conjuntos de vectores são bases de $\mathcal{P}_2$ (espaço linear dos polinómios reais de grau menor ou igual a 2). Caso não sejam bases, determine subconjuntos desses conjuntos que sejam bases e as dimensões dos espaços gerados por cada um desses subconjuntos. Determine as coordenadas do vector $1-t$ em cada base ordenada de $\mathcal{P}_2$ encontrada. Relativamente a cada base ordenada de $\mathcal{P}_2$, determine ainda o vector cujas coordenadas são $(-1,3,2)$.

(i) $\{2+t-t^2, 2t+2t^2, -t^2\}$ **(ii)** $\{2t-t^2, 1-2t^2, 2+t, 1-4t\}$

(iii) $\{1+t^2, t-t^2, 1-t+2t^2, 1+t\}$ **(iv)** $\{-1+2t+t^2, 2-t\}$

(v) $\{1+2t-t^2, 3+t^2, 5+4t-t^2, -2+2t-t^2\}$ **(vi)** $\{1, t, t^2\}$

30. Mostre que as matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ formam uma base para o espaço linear $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

31. Seja $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 11 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \right\}$. Seja W um subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ gerado por S. Determine uma base para W que inclua vectores de S.

32. Determine uma base para $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$. Qual é a dimensão do espaço linear $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$?

33. Determine uma base para cada um dos seguintes subespaços de $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e calcule a respectiva dimensão:

(i) O conjunto de todas as matrizes (reais) diagonais do tipo 3×3.

(ii) O conjunto de todas as matrizes (reais) simétricas do tipo 3×3.

34. Determine as dimensões e indique bases para: o núcleo, o espaço das linhas e o espaço das colunas das seguintes matrizes.

(i) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ **(iii)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(iv)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(vi)** $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **(vii)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Determine tambem a característica e a nulidade de cada uma delas.

35. Sejam U e V subespaços de W tais que $\dim U = 4, \dim V = 5$ e $\dim W = 7$. Diga quais as dimensões possíveis para $U \cap V$.

36. Determine bases e calcule as dimensões de $U+V$ e $U\cap V$, dizendo em que casos $U+V$ é a soma directa $U\oplus V$ (determine-a) dos subespaços U e V.

(i) $U = L\left(\{(1,-1,1),(0,1,1)\}\right),\ V = L\left(\{(1,1,2),(-1,1,1)\}\right)$ em $\mathbb{R}^3$.

(ii) $U = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y-z=0 \ \text{ e } \ x+y=0\},\ \ V = L\left(\{(1,1,1)\}\right)$ em $\mathbb{R}^3$.

(iii) $U = L\left(\{(1,0,1),(-1,1,2)\}\right),\ V = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+3z=0\}$ em $\mathbb{R}^3$.

(iv) $U = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=y=z\},\ V = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=0\}$ em $\mathbb{R}^3$.

(v) $U = L\left(\{1+t,1-t^2\}\right),\quad V = \{a_0+a_1t+a_2t^2\in\mathcal{P}_2 : a_2-a_1+a_0=0\}$ em $\mathcal{P}_2$.

(vi) $U = L\left(\{1+t,1-t^3\}\right),\quad V = L\left(\{1+t+t^2,t-t^3,1+t+t^3\}\right)$ em $\mathcal{P}_3$.

(vii) $U = L\left(\{(2,-2,1,-2),(-1,1,1,3),(0,0,-6,-8),(-1,1,-5,-5)\}\right),$
$V = L\left(\{(0,0,0,-1),(0,1,2,3),(0,2,4,8)\}\right)$ em $\mathbb{R}^4$.

(viii) $U = \{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : x+2y+3z=0 \ \text{ e } y+2z+3w=0\},$
$V = L\left(\{(2,5,-4,1),(0,9,-6,1),(-4,-1,2,-1)\}\right)$ em $\mathbb{R}^4$.

Neste alínea **(viii)** mostre que $U=V$.

(ix) Seja U o subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado por

$$\{(1,-1,-1,-2,0),(1,-2,-2,0,-3),(1,-1,-2,-2,1)\}.$$

Seja V o subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado por

$$\{(1,-2,-3,0,-2),(1,-1,-3,2,-4),(1,-1,-2,2,-5)\}.$$

Comece por escrever U e V como soluções de sistemas de equações lineares homogéneas.

(x) Sejam U e V subespaços de $\mathbb{R}^4$ gerados respectivamente por F e por G, com

$$\begin{aligned} F &= \{(1,0,-1,0),(0,1,1,1),(1,0,0,-2),(0,0,-1,2)\},\\ G &= \{(1,1,1,1),(1,2,0,-1),(0,0,1,1)\}.\end{aligned}$$

37. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0\\ 2 & -2 & -1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

(i) Calcule a nulidade e a característica de A.

(ii) Determine bases para o espaço das colunas de A e para o núcleo de A.

(iii) Usando a alínea anterior, determine a solução geral do sistema de equações lineares homogéneo $Au=\mathbf{0}$.

(iv) Resolva o sistema de equações $Au=b$, com $b=(1,0,2,-1,0)$. Note que b é igual à 1^a coluna de A e use esse facto de modo a encontrar uma solução particular de $Au=b$.

38. Utilize a informação da seguinte tabela para, em cada caso, determinar a dimensão do espaço gerado pelas linhas de A, do espaço gerado pelas colunas de A, do núcleo de A e do núcleo de A^T. Diga tambem se o correspondente sistema de equações lineares não homogéneo $AX = B$ é possível, determinando para esses casos, o número de parâmetros que entram na solução geral de $AX = B$.

A	3×3	3×3	3×3	5×9	9×5	4×4	6×2
car A	3	2	1	2	2	0	2
car $[A \mid B]$	3	3	1	2	3	0	2

39. Construa uma matriz cujo núcleo seja gerado pelo vector $(2, 0, 1)$.

40. Existe alguma matriz cujo espaço das linhas contém o vector $(1, 1, 1)$ e cujo núcleo contém $(1, 0, 0)$?

41. Quais são as matrizes do tipo 3×3 cujo núcleo tem dimensão 3?

42. Seja $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{C}(A) = \mathcal{N}(A)$. Prove que $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ com n par. Dê um exemplo para $n = 4$.

43. Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tal que car $A = n$ e $A^2 = A$. Prove que $A = I$.

44. Sejam $B_1 = \{(1, 2), (0, 1)\}$ e $B_2 = \{(1, 1), (2, 3)\}$ duas bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$. Seja $v = (1, 5)$.

    (i) Determine as coordenadas de v em relação à base B_1.

    (ii) Determine a matriz $S_{B_1 \to B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2.

    (iii) Determine as coordenadas de v em relação à base B_2, usando as alíneas anteriores.

    (iv) Determine, directamente, as coordenadas de v em relação à base B_2.

    (v) Determine a matriz $S_{B_2 \to B_1}$ de mudança da base B_2 para a base B_1.

    (vi) Determine as coordenadas de v em relação à base B_1, usando a alínea anterior, e compare com o resultado obtido em **(i).**

45. Sejam $B_1 = \{v_1, v_2\}$ e $B_2 = \{w_1, w_2\}$ duas bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$, onde

    $$v_1 = (1, 2), \quad v_2 = (0, 1).$$

    Suponha que a matriz $S_{B_2 \to B_1}$ de mudança da base B_2 para a base B_1, é dada por:

    $$S_{B_2 \to B_1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

    Determine B_2.

46. Sejam $B_1 = \{v_1, v_2\}$ e $B_2 = \{w_1, w_2\}$ duas bases ordenadas de $\mathcal{P}_1$, onde

    $$w_1 = -1 + t, \quad w_2 = 1 + t.$$

Suponha que a matriz $S_{B_1 \to B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2, é dada por:

$$S_{B_1 \to B_2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine B_1.

47. Sejam $B_1 = \{1, 1-t, t^2\}$ e $B_2 = \{1, 1+t, 1+t+t^2\}$ duas bases ordenadas de $\mathcal{P}_2$.

(i) Suponha que as coordenadas de um vector $p(t) \in \mathcal{P}_2$ em relação à base B_2 são dadas por $(1, 2, 3)$. Determine as coordenadas do mesmo vector $p(t)$ em relação à base B_1.

(ii) Determine a matriz $S_{B_1 \to B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2 e utilize-a para determinar as coordenadas do vector $2 - t + t^2$ na base B_2.

48. Sejam $B_1 = \{v_1, v_2\}$ e $B_2 = \{w_1, w_2\}$ duas bases ordenadas de $\mathcal{P}_1$, onde

$$w_1 = t, \quad w_2 = 1 - t.$$

Suponha que a matriz $S_{B_2 \to B_1}$ de mudança da base B_2 para a base B_1, é dada por:

$$S_{B_2 \to B_1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine B_1.

49. Sejam $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $B_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ duas bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$, onde

$$v_1 = (1, 0, 1), \quad v_2 = (1, 1, 0), \quad v_3 = (0, 0, 1).$$

Suponha que a matriz $S_{B_1 \to B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2, é dada por:

$$S_{B_1 \to B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine B_2.

50. Sejam $B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ e

$$B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

duas bases ordenadas de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Determine a matriz $S_{B_1 \to B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2 e utilize-a para determinar as coordenadas do vector $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ em relação à base B_2.

51. Seja $B = \{v_1, v_2\}$ uma base ordenada de $\mathcal{P}_1$. Sejam $(1, -1)$ e $(2, 2)$ respectivamente as coordenadas de dois polinómios $1 + t$ e $1 - t$ em relação à base B. Determine B.

52. Sejam $B_1 = \{v_1, v_2\}$ e $B_2 = \{w_1, w_2\}$ duas bases ordenadas de $\mathcal{P}_1$. Suponha que $(1, -1)$ e $(2, 2)$ são respectivamente as coordenadas de um polinómio $p(t)$ em relação às bases B_1 e B_2. Suponha ainda que $(1, 1)$ e $(2, -2)$ são respectivamente as coordenadas de um polinómio $q(t)$ em relação às bases B_1 e B_2. Determine a matriz $S_{B_1 \to B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2.