

4ª Ficha de exercícios para as aulas de problemas

1. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Considere a aplicação $T_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $T_{a,b}(x) = ax + b$. Determine os valores de a e de b para os quais $T_{a,b}$ é linear.

2. Diga quais das seguintes transformações são lineares. Determine para cada transformação linear a correspondente matriz que a representa em relação às respectivas bases canónicas (ordenadas). Determine também, se possível, para cada uma dessas transformações lineares, bases para o núcleo $\mathcal{N}(T)$ e para o contradomínio $\mathcal{I}(T)$, bem como as respectivas dimensões (de $\mathcal{N}(T)$ e de $\mathcal{I}(T)$). Diga ainda quais são injectivas, sobrejectivas e bijectivas.

(i) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $T(x, y) = (x + 2y, 3x - y)$.

(ii) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $T(x, y) = (1 - y, 2x)$.

(iii) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ com $T(x, y, z) = (x, 2x, -x)$.

(iv) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $T(x, y, z) = (0, 0)$.

(v) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ com $T(x, y) = -3x$.

(vi) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ com $T(x, y, z) = (0, -1, 2)$.

(vii) $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ com $T(x) = (2x, 0, -x)$.

(viii) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $T(x, y, z) = (x^2 - y, 2y)$.

(ix) $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $T(x, y, z, w) = (x - y, 3w)$.

(x) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ com $T(x, y, z) = (-z, y - 2z, 2y, y + z)$.

(xi) $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $T(x) = (0, 0)$.

(xii) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ com $T(x, y, z) = (x + 2y, 3z, x - z)$.

(xiii) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ com $T(x, y, z) = (x, y, z)$.

(xiv) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $T(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$. Aplicação que ao ponto de coordenadas (x, y) faz corresponder o ponto obtido por uma rotação de amplitude θ em torno da origem e no sentido contrário ao dos ponteiros de um relógio.

(xv) $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$ com $T(p(t)) = 2p(1 - t) - tp'(t)$,

onde $\mathcal{P}_2 = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ e p' é a derivada de 1ª ordem de p .

(xvi) $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$ com

$$T(p(t)) = p(0) - p(-1) + (p(-1) + p(1))t + (p(-1) - p(1) - 2p(0))t^2.$$

(xvii) $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ com $T(p(t)) = \begin{bmatrix} p(1) & p(0) \\ p(0) & p(-1) \end{bmatrix}$.

3. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^3 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ de \mathbb{R}^3 é representada pela matriz

$$M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine a expressão geral de T , isto é, determine $T(x, y, z)$ para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Determine, se possível, bases para o núcleo $\mathcal{N}(T)$ e para o contradomínio $\mathcal{I}(T)$, bem como as respectivas dimensões (de $\mathcal{N}(T)$ e de $\mathcal{I}(T)$).

4. Considere a base ordenada $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ de \mathbb{R}^2 , em que $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (1, 0)$ e seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que

$$T(v_1) = (1, -2), \quad T(v_2) = (-3, 1).$$

(i) Calcule $T(2, 1)$.

(ii) Determine a expressão geral de T , isto é, determine $T(x, y)$ para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(iii) Determine a matriz $M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2)$ que representa T em relação à base canónica (ordenada) \mathcal{B}_c^2 de \mathbb{R}^2 .

(iv) Determine as matrizes de mudança de base $S_{\mathcal{B}_c^2 \rightarrow \mathcal{B}}$ e $S_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_c^2}$. Determine as coordenadas do vector $(2, 1)$ na base \mathcal{B} .

(v) Determine a matriz $M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})$ que representa T em relação à base ordenada \mathcal{B} de \mathbb{R}^2 . Determine as coordenadas do vector $T(2, 1)$ na base \mathcal{B} .

(vi) Determine a matriz $M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B})$ que representa T em relação às bases ordenadas \mathcal{B}_c^2 e \mathcal{B} de \mathbb{R}^2 .

(vii) Determine a matriz $M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B}_c^2)$ que representa T em relação às bases ordenadas \mathcal{B} e \mathcal{B}_c^2 de \mathbb{R}^2 .

5. Considere as transformações lineares T_1 e T_2 cujas matrizes que as representam em relação às bases canónicas (ordenadas) de \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 são dadas respectivamente por

$$M(T_1; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M(T_2; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine as expressões gerais de $(T_1 \circ T_2)(x, y)$ e $(T_2 \circ T_1)(x, y, z)$ para quaisquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

6. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (2y, y - x, -x).$$

Determine a matriz $M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})$ que representa T em relação à base ordenada

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\} \quad \text{de} \quad \mathbb{R}^3 \quad \text{com} \quad v_1 = (1, 0, -1), \quad v_2 = (1, 2, 0), \quad v_3 = (-1, 1, 1).$$

7. Seja

$$\mathcal{B}_c^{2 \times 2} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

a base canónica (ordenada) de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Considere a transformação linear

$$S : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \text{ definida por } S(A) = A^T.$$

Determine a matriz $M(S; \mathcal{B}_c^{2 \times 2}; \mathcal{B}_c^{2 \times 2})$ que representa S em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^{2 \times 2}$.

8. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e a base canónica (ordenada)

$$\mathcal{B}_c^3 = \{v_1, v_2, v_3\} \text{ de } \mathbb{R}^3, \text{ com } v_1 = (1, 0, 0), \quad v_2 = (0, 1, 0), \quad v_3 = (0, 0, 1).$$

Suponha que se tem

$$T(v_3) = 3v_1 + v_2 - 2v_3, \quad T(v_2 + v_3) = v_1, \quad T(v_1 + v_2 + v_3) = v_2 + v_3.$$

(i) Calcule $T(2v_1 - v_2 + 3v_3)$.

(ii) Determine a matriz $M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)$ que representa T em relação à base canónica (ordenada) \mathcal{B}_c^3 de \mathbb{R}^3 .

(iii) Determine duas bases ordenadas $\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ de \mathbb{R}^3 de modo a que a matriz $M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2)$ que represente T em relação a essas bases \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 seja a matriz identidade:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que em relação às bases ordenadas $\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2\}$ de \mathbb{R}^2 e $\mathcal{B}_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ de \mathbb{R}^3 com

$$u_1 = (1, 1), \quad u_2 = (2, -1), \quad v_1 = (1, 0, 1), \quad v_2 = (1, 1, 2), \quad v_3 = (0, 1, -1),$$

é representada pela matriz

$$M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Considere ainda as bases ordenadas $\mathcal{B}'_1 = \{u'_1, u'_2\}$ de \mathbb{R}^2 e $\mathcal{B}'_2 = \{v'_1, v'_2, v'_3\}$ de \mathbb{R}^3 com

$$u'_1 = (1, 0), \quad u'_2 = (1, 1), \quad v'_1 = (1, 0, 0), \quad v'_2 = (1, 1, 0), \quad v'_3 = (1, 1, 1).$$

(i) Determine as coordenadas do vector $T(-1, 2)$ na base \mathcal{B}_2 .

(ii) Determine as coordenadas do vector $(-1, 2)$ na base \mathcal{B}'_1 .

(iii) Determine as coordenadas do vector $T(-1, 2)$ na base \mathcal{B}'_2 .

(iv) Determine, se possível, uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{N}(T)$. Diga se T é injectiva.

(v) Determine, se possível, uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{I}(T)$. Diga se T é sobrejectiva.

(vi) Determine a expressão geral de T , isto é, determine $T(x, y)$ para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(vii) Determine a matriz $M(T; \mathcal{B}'_1; \mathcal{B}'_2)$ que representa T em relação às bases ordenadas \mathcal{B}'_1 e \mathcal{B}'_2 .

10. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y, z) = (x + y, x + y - z).$$

(i) Determine a matriz $M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^2)$ que representa T em relação às bases canónicas (ordenadas) \mathcal{B}_c^3 e \mathcal{B}_c^2 de \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^2 respectivamente.

(ii) Determine, se possível, uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{N}(T)$. Diga se T é injectiva.

(iii) Determine, se possível, uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{I}(T)$. Diga se T é sobrejectiva.

(iv) Determine a solução geral da equação linear $T(x, y, z) = (1, 1)$.

(v) Considere a equação linear $T(x, y, z) = (a, b)$. Verifique se existe algum vector $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ para o qual essa equação seja impossível.

(vi) Considere a equação linear $T(x, y, z) = (a, b)$. Verifique se existe algum vector $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ para o qual essa equação seja possível e determinada.

11. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuja matriz $M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)$ que a representa em relação à base canónica (ordenada) \mathcal{B}_c^3 de \mathbb{R}^3 é dada por

$$M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(i) Determine a expressão geral de T , isto é, determine $T(x, y, z)$ para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(ii) Determine, se possível, uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{N}(T)$. Diga se T é injectiva.

(iii) Determine, se possível, uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{I}(T)$. Diga se T é sobrejectiva.

(iv) Determine a solução geral da equação linear $T(x, y, z) = (3, 3, 0)$.

(v) Considere a equação linear $T(x, y, z) = (a, b, c)$. Verifique se existe algum vector $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ para o qual essa equação seja impossível.

(vi) Considere a equação linear $T(x, y, z) = (a, b, c)$. Verifique se existe algum vector $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ para o qual essa equação seja possível e indeterminada.

12. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuja matriz $M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})$ que a representa em relação à base (ordenada) $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ de \mathbb{R}^3 com

$$v_1 = (1, 1, 1), \quad v_2 = (1, 1, 0), \quad v_3 = (1, 0, 0),$$

é dada por

$$M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(i) Determine, se possível, uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{N}(T)$. Diga, justificando, se T é sobrejectiva e se T é injectiva.

(ii) Determine, se possível, uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{I}(T)$.

(iii) Mostre que a equação linear $T(x, y, z) = (2, 4, 0)$ não tem soluções.

(iv) Determine $T(1, 1, 1)$ e resolva a equação linear $T(x, y, z) = (-1, -1, -\frac{1}{3})$.

(v) Considere a equação linear $T(x, y, z) = (a, b, c)$. Verifique se existe algum vector $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ para o qual essa equação seja possível e indeterminada.

(vi) Determine a expressão geral de T , isto é, determine $T(x, y, z)$ para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

13. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y - 4z, z).$$

(i) Determine a matriz $M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)$ que representa T em relação à base canónica (ordenada) \mathcal{B}_c^3 de \mathbb{R}^3 .

(ii) Mostre que T é injectiva e determine a expressão geral de T^{-1} , isto é, determine $T^{-1}(x, y, z)$ para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(iii) Justifique que T é um isomorfismo.

(iv) Determine a solução geral da equação linear $T(x, y, z) = (1, 1, 2)$.

14. Seja

$$\mathcal{B}_c^{2 \times 2} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

a base canónica (ordenada) de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Considere a transformação

$$T : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \text{ definida por } T(X) = AX - XA, \text{ com } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(i) Verifique que T é linear.

(ii) Determine a expressão geral de T .

(iii) Determine a matriz $M(T; \mathcal{B}_c^{2 \times 2}; \mathcal{B}_c^{2 \times 2})$ que representa T em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^{2 \times 2}$ de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

(iv) Determine, se possível, uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{N}(T)$. Diga se T é injectiva.

(v) Determine, se possível, uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{I}(T)$. Diga se T é sobrejectiva.

15. Considere as transformações lineares $T_1, T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidas respectivamente por

$$T_1(x, y) = (x + y, x - y) \quad \text{e} \quad T_2(x, y) = (2x + y, x - 2y).$$

(i) Determine as matrizes $M(T_1; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2)$ e $M(T_2; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2)$ que representam respectivamente T_1 e T_2 em relação à base canónica (ordenada) \mathcal{B}_c^2 de \mathbb{R}^2 .

(ii) Determine a matriz $A = M(T_2 \circ T_1; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2)$ que representa $T_2 \circ T_1$ em relação à base canónica (ordenada) \mathcal{B}_c^2 de \mathbb{R}^2 .

(iii) Determine, usando a alínea anterior, a expressão geral de $T_2 \circ T_1$, isto é, $(T_2 \circ T_1)(x, y)$ para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(iv) Determine, directamente a partir das expressões de T_1 e de T_2 , a expressão geral de $T_2 \circ T_1$.

(v) Mostre que T_1 e T_2 são invertíveis.

(vi) Determine as expressões gerais de $T_1^{-1}(x, y)$, $T_2^{-1}(x, y)$ e $(T_1^{-1} \circ T_2^{-1})(x, y)$ para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(vii) Determine a matriz $M((T_2 \circ T_1)^{-1}; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2)$ que representa $(T_2 \circ T_1)^{-1}$ em relação à base canónica (ordenada) \mathcal{B}_c^2 de \mathbb{R}^2 e verifique que é igual a A^{-1} , onde A é a matriz determinada em (ii).

(viii) Verifique que $(T_2 \circ T_1)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$.

16. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que em relação à base canónica ordenada ($\mathcal{B}_c^2 = \{(1, 0), (0, 1)\}$) de \mathbb{R}^2 é representada pela matriz:

$$M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Justifique que T é injectiva e resolva a equação linear $T(x, y) = (1, 2)$.

17. Considere a transformação linear $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $T_1(x, y) = x$. Seja

$$M(T_2; \mathcal{B}_c^1; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a matriz que representa a aplicação linear $T_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ em relação às bases canónicas ordenadas $\mathcal{B}_c^1 = \{1\}$ e \mathcal{B}_c^2 de \mathbb{R} e \mathbb{R}^2 respectivamente. Determine uma base para o núcleo: $\mathcal{N}(T_2 \circ T_1)$.

18. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuja representação matricial em relação às bases ordenadas $\mathcal{B}_1 = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ de \mathbb{R}^3 e $\mathcal{B}_2 = \{(1, 1), (0, 1)\}$ de \mathbb{R}^2 é dada pela matriz:

$$M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Determine uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T)$ e diga, justificando, se T é sobrejectiva.

19. Considere a transformação linear $T_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T_1(x, y, z) = (2x+y, y+2z)$. Considere ainda a transformação linear $T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuja representação matricial em relação à base (ordenada) $\mathcal{B} = \{(2, 1), (1, 2)\}$ de \mathbb{R}^2 e à base canónica \mathcal{B}_c^3 de \mathbb{R}^3 é dada pela matriz:

$$M(T_2; \mathcal{B}; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (i) Determine uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T_1)$ de T_1 e diga, justificando, se T_1 é sobrejectiva.
- (ii) Determine uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T_2)$ de T_2 e diga, justificando, se T_2 é injectiva.
- (iii) Diga, justificando, se se tem $\mathcal{N}(T_1) + \mathcal{I}(T_2) = \mathbb{R}^3$ e determine a dimensão de $\mathcal{N}(T_1) \cap \mathcal{I}(T_2)$.
- (iv) Determine a matriz $M(T_2; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^3)$ que representa T_2 em relação às bases canónicas \mathcal{B}_c^2 e \mathcal{B}_c^3 de \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 respectivamente.
- (v) Determine a solução geral da equação $(T_1 \circ T_2)(x, y) = \left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$.
20. Considere a transformação linear $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T_1(x, y) = (2x+y, 0, x+2y)$. Considere ainda a transformação linear $T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuja representação matricial em relação à base (ordenada) $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ de \mathbb{R}^3 e à base canónica \mathcal{B}_c^2 de \mathbb{R}^2 é dada pela matriz:

$$M(T_2; \mathcal{B}; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

- (i) Determine $T_2(0, 1, 0)$ e $T_2(0, 0, 1)$.
- (ii) Determine uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T_1)$ de T_1 e diga, justificando, se T_1 é sobrejectiva.
- (iii) Determine uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T_2)$ de T_2 e diga, justificando, se T_2 é injectiva.
- (iv) Determine a solução geral da equação $(T_2 \circ T_1)(x, y) = (-1, 1)$.
21. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{P}_3$ definida por

$$T(1, 1, -1) = 2 + 2t^2, \quad T(1, -1, 1) = -t - t^3 \quad \text{e} \quad T(-1, 1, 1) = 2 + t + 2t^2 + t^3.$$

- (i) Determine a expressão geral de T , isto é, determine $T(x, y, z)$ para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- (ii) Determine, se possível, uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{N}(T)$. Diga se T é injectiva.
- (iii) Determine, se possível, uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{I}(T)$. Diga se T é sobrejectiva.
- (iv) Resolva, em \mathbb{R}^3 , a equação linear $T(x, y, z) = 1 + t + t^2 + t^3$.

22. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Considere a transformação linear $T_\lambda : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{P}_2$ definida por

$$T_\lambda(x, y, z) = z - y + \lambda(y - x)t + xt^2.$$

(i) Determine, se possível, uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T_\lambda)$. Determine a dimensão de $\mathcal{N}(T_\lambda)$. Diga se T_λ é injectiva.

(ii) Determine, se possível, uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T_\lambda)$. Determine a dimensão de $\mathcal{I}(T_\lambda)$. Diga se T_λ é sobrejectiva.

(iii) Considere $\lambda = 0$ e resolva a equação linear $T_0(x, y, z) = 1 + t^2$.

23. Considere o espaço linear \mathcal{P}_2 dos polinómios reais de variável real e de grau menor ou igual a 2. Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$ definida por

$$T(p(t)) = p'(t) - 2p(t),$$

onde $p'(t)$ é a derivada de primeira ordem de $p(t)$.

(i) Determine a expressão geral de T .

(ii) Sendo $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ a base canónica (ordenada) de \mathcal{P}_2 , determine a matriz $M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})$ que representa T em relação à base \mathcal{B} .

(iii) Justifique que T é um isomorfismo e verifique que a expressão geral do isomorfismo T^{-1} é dada por

$$T^{-1}(p(t)) = -\frac{1}{2}p(t) - \frac{1}{4}p'(t) - \frac{1}{8}p''(t)$$

para todo o $p(t) \in \mathcal{P}_2$, onde $p''(t)$ é a derivada de segunda ordem de $p(t)$.

(iv) Resolva, em \mathcal{P}_2 , a equação diferencial linear $p'(t) - 2p(t) = (2 - 3t)^2$.

24. Considere o espaço linear \mathcal{P}_2 dos polinómios reais de variável real e de grau menor ou igual a 2. Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$ definida por

$$T(p(t)) = t^2p''(t) - 2p(t),$$

onde $p''(t)$ é a derivada de segunda ordem de $p(t)$.

(i) Determine a expressão geral de T .

(ii) Sendo $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ a base canónica (ordenada) de \mathcal{P}_2 , determine a matriz $M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})$ que representa T em relação à base \mathcal{B} .

(iii) Determine, se possível, uma base para $\mathcal{N}(T)$ e uma base para $\mathcal{I}(T)$ e diga, justificando, se T é injectiva e/ou sobrejectiva.

(iv) Resolva, em \mathcal{P}_2 , as equações diferenciais lineares:

$$\mathbf{a)} \quad t^2p''(t) - 2p(t) = 2 - t; \qquad \mathbf{b)} \quad 2tp'(t) - 2p(0) = 2 - t.$$

25. Seja U o subespaço das matrizes simétricas de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, isto é,

$$U = \{A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : A = A^T\}.$$

Considere a transformação linear $T : U \rightarrow U$ definida por

$$T(A) = AB + BA$$

com $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

- (i) Determine a expressão geral de T .
 - (ii) Determine uma base para U e calcule a matriz que representa T em relação a essa base.
 - (iii) Determine, se possível, uma base para $\mathcal{N}(T)$ e uma base para $\mathcal{I}(T)$ e diga, justificando, se T é injectiva e/ou sobrejectiva.
 - (iv) Resolva, em U , a equação linear $T(A) = B$.
26. Considere a transformação linear $T : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_3$ cuja matriz $M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2)$ que a representa em relação às bases ordenadas

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ e $\mathcal{B}_2 = \{1 + t, t + t^2, t^2 + t^3, t^3\}$ de \mathcal{P}_3 é dada por

$$M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (i) Determine a expressão geral de T .
 - (ii) Justifique que T é um isomorfismo e determine a expressão geral do isomorfismo T^{-1} , isto é, determine
- $$T^{-1}(a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3).$$
- (iii) Resolva a equação linear $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 1 + 2t + 3t^2 + 4t^3$.
27. Seja U o espaço linear das funções reais de variável real duas vezes diferenciáveis. Considere a transformação linear $T : U \rightarrow U$ definida por

$$T(f) = f'' - 2f' + f.$$

Considere o subespaço $S = \{f \in U : f'' - 2f' + f = \mathbf{0}\}$ de U .

- (i) Mostre que o conjunto $\{e^t, te^t\}$ é uma base de S . Sugestão: Mostre que se $f \in S$, então $f(t)e^{-t}$ é um polinómio de grau menor ou igual a 1.
 - (ii) Mostre que dados $a, b \in \mathbb{R}$, existe uma única função $f \in S$ tal que $f(0) = a$ e $f'(0) = b$.
 - (iii) Determine a única solução f da equação diferencial linear $T(f) = 1$ que verifica $f(0) = 1$ e $f'(0) = 0$.
28. Seja V o subespaço linear de \mathbb{R}^4 gerado pelos vectores $v_1 = (1, 0, 0, -1)$ e $v_2 = (0, 1, -1, 0)$. Considere ainda a transformação linear $T : V \rightarrow V$ tal que

$$T(v_1) = v_2, \quad T(v_2) = -v_1.$$

(i) Determine a matriz $M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})$ que representa T em relação à base ordenada $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ de V .

(ii) Encontre, em V , a solução geral da equação $T(u) = (2, -3, 3, -2)$.

(iii) Sejam $w_1 = (0, 0, 1, 1)$, $w_2 = (0, 0, 0, 1)$ e considere a transformação linear $R : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por

$$R(v_1) = v_2, \quad R(v_2) = -v_1, \quad R(w_1) = R(w_2) = (0, 0, 0, 0).$$

Encontre, em \mathbb{R}^4 , a solução geral da equação $R(u) = (2, -3, 3, -2)$.

29. Seja \mathcal{P}_n , com $n \in \mathbb{N}$, o espaço linear real dos polinómios reais de variável real e de grau menor ou igual a n . Considere a transformação linear $T_1 : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_1$ cuja representação matricial em relação às bases ordenadas $\mathcal{B}_1 = \{1 + t, 1 - t, t^2\}$ de \mathcal{P}_2 e $\mathcal{B}_2 = \{1 + t, 1 + 2t\}$ de \mathcal{P}_1 , é dada pela matriz:

$$M(T_1; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considere ainda a transformação linear $T_2 : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_2$ tal que

$$T_2(1) = 1 - t \quad T_2(t) = 2 + 8t - 2t^2.$$

a) Determine a matriz $M(T_2; \mathcal{B}; \mathcal{B}_1)$ que representa T_2 em relação às bases ordenadas $\mathcal{B} = \{1, t\}$ de \mathcal{P}_1 e $\mathcal{B}_1 = \{1 + t, 1 - t, t^2\}$ de \mathcal{P}_2 .

b) Determine uma base para $\mathcal{N}(T_1)$ (núcleo de T_1) e diga, justificando, se T_1 é sobrejectiva.

c) Determine $T_1(t)$ e encontre, em \mathcal{P}_2 , a solução geral da equação $T_1(p(t)) = t$.

d) Verifique que $T_1 \circ T_2 = I$.