Instituto Superior Técnico - Álgebra Linear - 2^o Semestre 2010/2011

LEAN - LEMat - MEAer - MEMec

6^a Ficha de exercícios para as aulas de problemas

1. Diga quais das seguintes aplicações $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definem em $\mathbb{R}^2$ um produto interno.

   (i) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2$

   (ii) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 3 x_2 y_2$

   (iii) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = -2 x_1 y_1 + 3 x_2 y_2$

2. Diga quais das seguintes aplicações $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definem em $\mathbb{R}^3$ um produto interno.

   (i) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$

   (ii) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_2 - x_2 y_1$

   (iii) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 2 x_1 y_1 + x_1 y_3 + x_3 y_1 + 2 x_2 y_2 + x_3 y_3$

3. Determine um produto interno em $\mathbb{R}^2$ tal que $\langle (1, 0), (0, 1) \rangle = 2$.

4. Considere os vectores $u = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$ e $v = \left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}} \right)$. Verifique que o conjunto $\{u, v\}$ é ortonormado relativamente ao produto interno definido em $\mathbb{R}^2$ por:

   $$\langle u, v \rangle = 3 u_1 v_1 + 2 u_2 v_2,$$

   onde $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$. Verifique porém que o mesmo conjunto $\{u, v\}$ não é ortonormado relativamente ao produto interno usual definido em $\mathbb{R}^2$.

5. Considere em $\mathbb{R}^4$ o produto interno usual. Determine o subespaço de $\mathbb{R}^4$ ortogonal aos vectores $(1, 0, 0, 0)$ e $(1, 0, 0, 1)$.

6. Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno definido por:

   $$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2 x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

   (i) Calcule $\|u\|$, para qualquer vector $u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

   (ii) Considere os vectores $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (-1, 1, 0)$ e $u_3 = (0, 0, 1)$. Calcule os ângulos formados pelos vectores: u_1 e u_2; u_1 e u_3; u_2 e u_3.

   (iii) Justifique que o conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$. Calcule as coordenadas de um vector $u \in \mathbb{R}^3$ em relação a esta base.

7. Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Determine uma base ortonormada para o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vectores:

   $$(1, 0, -1, 0), (-1, 2, 0, 1) \text{ e } (2, 0, 2, 1).$$

8. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Considere também os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:

$$U = L\left(\{(0,1,1),(0,0,1)\}\right) \qquad \text{e} \qquad V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y - z = 0\right\}.$$

(i) Determine uma base ortogonal para U e uma base ortonormada para V.

(ii) Determine duas bases ortonormadas para $\mathbb{R}^3$: uma que inclua dois vectores de U e outra que inclua dois vectores de V.

(iii) Determine o elemento de U mais próximo de $(1,1,1)$ e a distância entre $(1,1,1)$ e $V^{\perp}$.

9. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e considere o produto interno usual. Sejam $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{C}(A)$ e $\mathcal{L}(A)$ respectivamente o núcleo, espaço das colunas e espaço das linhas de A.

(i) Determine uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ que inclua dois vectores de $\mathcal{C}(A)$.

(ii) Determine o elemento de $\mathcal{L}(A)$ mais próximo de $(1,1,1)$ e a distância entre $(1,1,1)$ e $\mathcal{N}(A)$.

10. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e considere o produto interno usual. Sejam $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{C}(A)$ e $\mathcal{L}(A)$ respectivamente o núcleo, espaço das colunas e espaço das linhas de A.

(i) Determine uma base ortonormada para $(\mathcal{N}(A))^{\perp}$ (o complemento ortogonal do núcleo de A).

(ii) Determine uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ que inclua dois vectores de $\mathcal{C}(A)$.

(iii) Determine o elemento de $\mathcal{L}(A)$ mais próximo de $(1,2,3)$ e a distância entre $(1,2,3)$ e $(\mathcal{L}(A))^{\perp}$.

11. Considere em $\mathbb{R}^4$ o seguinte subespaço: $U = L\left(\{(1,1,1,0),(0,1,1,1)\}\right)$. Determine uma matriz A do tipo 2×4 cujo núcleo seja igual a U, isto é, tal que $U = \mathcal{N}(A)$.

12. Defina o produto interno em $\mathbb{R}^2$ em relação ao qual a base $\{(1,0),(1,-1)\}$ é ortonormada.

13. Considere a aplicação $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3) \rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 4x_2y_2 + x_3y_3.$$

(i) Verifique que $\langle , \rangle$ define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

(ii) Seja $V = L\left(\{(3,4,0)\}\right) \subset \mathbb{R}^3$. Diga qual é o ponto de V mais próximo de $(0,1,0)$.

(iii) Determine uma base ortogonal para o complemento ortogonal de V, em relação ao produto interno $\langle , \rangle$.

(iv) Seja $P_V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a projecção ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre V. Indique, em relação ao produto interno $\langle , \rangle$, uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$ para a qual a representação matricial de P_V seja dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

14. Seja U o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $v_1 = (0, 1, 0)$ e $v_2 = \left(\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5}\right)$. Escreva $u = (1, 2, 3)$ na forma $u = u_1 + u_2$, com $u_1 \in U$ e $u_2 \in U^\perp$.

15. Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Em cada alínea seguinte, determine uma base ortogonal para o complemento ortogonal de U, isto é, para $U^\perp$.

(i) $U = L\left(\{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 1)\}\right)$

(ii) $U = L\left(\{(1, 0, 1, 1)\}\right)$

(iii) $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y + z + 2w = 0\}$

(iv) $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - z = 0 \quad \text{e} \quad 2x - y + 2z - w = 0\}$

16. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Considere também o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^3$:

$$U = L\left(\{(1, 1, 1), (1, 0, 0)\}\right).$$

(i) Determine uma base ortogonal para U.

(ii) Determine $u \in U$ e $v \in U^\perp$ tais que

$$(3, 2, 1) = u + v.$$

(iii) Determine a distância entre o ponto $(1, 0, 1)$ e o plano $\{(1, 1, 0)\} + U$.

(iv) Determine a distância entre o ponto (x, y, z) e o plano U.

17. Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Considere também o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^4$:

$$U = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z = 0 \quad \text{e} \quad y - z + w = 0\right\}.$$

(i) Determine uma base ortonormada para U.

(ii) Determine uma base ortonormada para $U^\perp$.

(iii) Determine as projecções ortogonais de $(0, 0, 1, 0)$ sobre U e $U^\perp$ respectivamente.

(iv) Determine as representações matriciais de $P_U : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ e de $P_{U^\perp} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ em relação à base canónica de $\mathbb{R}^4$.

(v) Determine a distância entre o ponto $(0, 0, 1, 0)$ e o subespaço U.

(vi) Determine a distância entre o ponto (x, y, z, w) e o subespaço U.

18. Considere $P_2 = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ a aplicação $\langle , \rangle : P_2 \times P_2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\langle p(t), q(t) \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

Considere também o seguinte subespaço de P_2: $U = \{p(t) \in P_2 : p(0) = 0\}$.

(i) Verifique que $\langle , \rangle$ define um produto interno em P_2.

(ii) Determine uma base ortonormada para U.

(iii) Determine uma base ortonormada para $U^\perp$.

(iv) Determine as projecções ortogonais do polinómio $1 + t$ sobre U e $U^\perp$ respectivamente.

(v) Determine as representações matriciais de $P_U : P_2 \to P_2$ e de $P_{U^\perp} : P_2 \to P_2$ em relação à base canónica $\{1, t, t^2\}$ de P_2.

(vi) Determine a distância entre $1 + t$ e U.

(vii) Determine a distância entre o polinómio $a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ e o subespaço U.

19. Considere a aplicação $\langle , \rangle : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(AB^T).$$

Considere também o subespaço U de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ constituído por todas as matrizes simétricas reais do tipo 2×2:

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : b = c \right\}.$$

(i) Verifique que $\langle , \rangle$ define um produto interno em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(ii) Determine uma base ortonormada para U.

(iii) Determine uma base ortonormada para $U^\perp$.

(iv) Determine as representações matriciais de $P_U : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e de $P_{U^\perp} : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ em relação à base canónica

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(v) Determine as projecções ortogonais da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sobre U e $U^\perp$ respectivamente.

(vi) Qual é a matriz simétrica mais próxima da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$?

(vii) Determine a distância entre $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e U.

(viii) Determine a distância entre $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e U.