Instituto Superior Técnico - Álgebra Linear - 1^o Semestre 2011/2012

LEAN - LEMat - MEAmbi - MEBiol - MEQ

3^a Ficha de exercícios para as aulas de problemas: 24 Out. - 11 Nov.

1. Verifique que os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, com as operações usuais, não são subespaços de $\mathbb{R}^2$.

   (i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$

   (ii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$

   (iii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$

2. Verifique que os seguintes conjuntos, com as operações usuais, são (todos os) subespaços de $\mathbb{R}^2$.

   (i) $\{(0, 0)\}$

   (ii) $V_k = \{(x, kx) : x \in \mathbb{R}\}$ com $k \in \mathbb{R}$

   (iii) $U = \{(0, a) : a \in \mathbb{R}\}$

   (iv) $\mathbb{R}^2$

3. No espaço linear $\mathbb{R}^3$, considere o subconjunto $U_k = \{(x, y, k) : x, y \in \mathbb{R}\}$ onde k é uma constante real. Determine os valores de k para os quais U_k é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

4. Considere o espaço linear $V = \mathbb{R}^3$. Diga quais dos seguintes subconjuntos de V, com as operações usuais, são subespaços de V e indique os respectivos conjuntos geradores.

   (i) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2\}$

   (ii) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$

   (iii) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$

   (iv) $\{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$

   (v) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2x \;\text{ e }\; z = 3x\}$

   (vi) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 1\}$

   (vii) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \;\text{ e }\; x - y - z = 0\}$

   (viii) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y \;\text{ ou }\; y = z\}$

   (ix) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0 \;\text{ e }\; 2y + z = 0\}$

   (x) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}$

5. Seja $\mathcal{P}_n$ o espaço linear de todos os polinómios reais de variável real e de grau menor ou igual a n, com as operações usuais. Diga quais dos seguintes subconjuntos de $\mathcal{P}_2$, com as operações usuais, são subespaços de $\mathcal{P}_2$ e indique os respectivos conjuntos geradores.

   (i) $\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_0 = 0\}$

   (ii) $\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 = 2a_0 \; e \; a_1 = 0\}$

   (iii) $\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_1 = 1\}$

   (iv) $\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 - a_1 = 2\}$

   (v) $\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 - a_1 + 2a_0 = 0\}$

6. Seja $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ o espaço linear de todas as matrizes do tipo $m \times n$ com entradas reais. Diga quais dos seguintes subconjuntos de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, com as operações usuais, são subespaços de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ e indique os respectivos conjuntos geradores.

   (i) $\left\{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) : b = a + c\right\}$

   (ii) $\left\{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & 0 & f \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) : b < 0\right\}$

   (iii) $\left\{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) : a = -2c \ \text{ e } \ f = 2e + d\right\}.$

7. Determine o espaço das colunas, o espaço das linhas e o núcleo das seguintes matrizes.

   (i) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(iii)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   (iv) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(v)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **(vi)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

   (vii) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(viii)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

8. Verifique que, com as operações usuais, o seguinte conjunto de matrizes

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

   gera o subespaço $\left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \\ 0 & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}) : a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$ do espaço linear $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$.

9. Considere, no espaço linear $\mathbb{R}^3$, os vectores

$$v_1 = (1, 2, 1), \quad v_2 = (1, 0, 2) \quad \text{e} \quad v_3 = (1, 1, 0).$$

   Mostre que os seguintes vectores são combinações lineares de v_1, v_2 e v_3.

   (i) $(3, 3, 0)$ **(ii)** $(2, 1, 5)$ **(iii)** $(-1, 2, 0)$ **(iv)** $(1, 1, 1)$

10. Considere, no espaço linear $\mathbb{R}^4$, os vectores $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (1, -1, 0, 0)$ e $v_3 = (0, 1, 2, 1)$. Diga quais dos seguintes vectores pertencem ao subespaço $L(\{v_1, v_2, v_3\})$.

    (i) $(-1, 4, 2, 2)$ **(ii)** $(2, 0, 2, 2)$ **(iii)** $(1, 1, -2, 2)$ **(iv)** $(0, 1, 1, 0)$

11. Determine o valor de k para o qual o vector $u = (1, -2, k) \in \mathbb{R}^3$ é combinação linear dos vectores

$$v = (3, 0, -2) \quad \text{e} \quad w = (2, -1, -5).$$

12. Considere, no espaço linear $\mathcal{P}_2$, os vectores $p_1(t) = 2 + t + 2t^2$, $p_2(t) = -2t + t^2$, $p_3(t) = 2 - 5t + 5t^2$ e $p_4(t) = -2 - 3t - t^2$. O vector

$$q(t) = 2 + t + t^2$$

pertence à expansão linear $L(\{p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t)\})$? Podem os vectores $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ e $p_4(t)$ gerar $\mathcal{P}_2$?

13. Verifique que os seguintes conjuntos de vectores geram $\mathbb{R}^3$.

(i) $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

(ii) $\{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$

(iii) $\{(1,1,1), (-1,1,-1), (1,-1,-1), (-1,-1,1)\}$

14. Escreva a matriz $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ como combinação linear das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Encontre uma matriz 2×2 que não pertença a

$$L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

Antes de a determinar, explique porque é que essa matriz existe.

15. Determine os vectores (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$ que pertencem a $L(\{u, v, w\})$ onde

$$u = (2,1,0), \quad v = (1,-1,2) \quad \text{e} \quad w = (0,3,-4).$$

16. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 13 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Verifique que o espaço das linhas de A é igual ao espaço das linhas de B. Conclua então que os espaços das colunas de A^T e de B^T são iguais.

17. Encontre um conjunto de geradores para cada um dos seguintes subespaços do espaço linear $\mathbb{R}^4$.

(i) $\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x = 0 \text{ e } y + z = 0\}$

(ii) $\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0\}$

(iii) $\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y - z = 0 \text{ e } x + y + 2w = 0 \text{ e } y - z + w = 0\}$

18. Defina por meio de sistemas de equações homogéneas os seguintes subespaços.

(i) Em $\mathcal{P}_2$: $L(\{1 - t^2, 1 + t\})$

(ii) $L(\{(1,0,1), (0,1,0), (-2,1,-2)\})$

(iii) $L\left(\{(0,1,0),(-2,1,-2)\}\right)$

(iv) $L\left(\{(1,1,2),(2,1,1)\}\right)$

(v) $L\left(\{(1,0,-1,1)\}\right)$

(vi) $L\left(\{(1,-2,5,-3),(2,-4,6,2),(3,-6,11,-1),(0,0,1,-2)\}\right)$

19. Determine as condições que os parametros $\alpha_i, \beta_i (i = 1, 2)$ devem verificar para que os vectores $(\alpha_1, \beta_1, 3)$ e $(\alpha_2, \beta_2, 9)$, no espaço linear $\mathbb{R}^3$, sejam linearmente independentes.

20. Diga se os seguintes conjuntos de vectores em $\mathbb{R}^3$ são linearmente dependentes ou linearmente independentes? Nos casos em que sejam linearmente dependentes, indique (para cada um) um subconjunto linearmente independente com o maior n^o possível de elementos e escreva os restantes como combinação linear desses vectores.

    (i) $\{(4,2,1),(2,6,-5),(1,-2,3)\}$

    (ii) $\{(1,2,-1),(3,2,5)\}$

    (iii) $\{(1,2,3),(1,1,1),(1,0,1)\}$

    (iv) $\{(1,0,-1),(0,0,0),(0,1,1)\}$

    (v) $\{(1,1,0),(0,2,3),(1,2,3),(x,y,z)\}$ (com $x, y, z \in \mathbb{R}$).

21. Determine todos os valores de a para os quais $\{(a^2,0,1),(0,a,2),(1,0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

22. Sejam $U = L\left(\{(1,1,0,0),(0,1,1,0)\}\right)$ e $V_k = L\left(\{(2,k,1,0),(0,0,0,1)\}\right)$ subespaços de $\mathbb{R}^4$. Determine os valores de k para os quais $\dim(U \cap V_k) = 1$.

23. No espaço linear $\mathbb{R}^3$, construa uma base que inclua os vectores:

    (i) $(1,0,2)$ e $(0,1,2)$. **(ii)** $(2,-1,1)$ e $(-4,2,1)$. **(iii)** $(-1,2,1)$ e $(1,0,-1)$.

24. Verifique que os seguintes subconjuntos do espaço linear de todas as funções reais de variável real são linearmente dependentes. Indique (para cada um) um subconjunto linearmente independente com o maior n^o possível de elementos e escreva os restantes como combinação linear desses vectores.

    (i) $S = \{\cos^2 t, \operatorname{sen}^2 t, \cos 2t\}$

    (ii) $S = \{2, \operatorname{sen}^2 t, \cos^2 t\}$

    (iii) $S = \{e^t, e^{-t}, \cosh t\}$

    (iv) $S = \left\{1, t, t^2, (t+1)^2\right\}$

    Determine uma base para cada subespaço $L(S)$ e calcule a respectiva dimensão.

25. Seja V o espaço linear de todas as funções reais de variável real. Sejam $f, g, h \in V$, com $f(t) = \operatorname{sen} t$, $g(t) = \cos t$ e $h(t) = t$. Mostre que o conjunto $\{f, g, h\}$ é linearmente independente.

26. Diga quais dos seguintes conjuntos de vectores são bases de $\mathbb{R}^2$. Caso não sejam bases, determine subconjuntos desses conjuntos que sejam bases e as dimensões dos espaços gerados por cada um desses subconjuntos. Em cada base de $\mathbb{R}^2$ encontrada, exprima o vector $(0, -1)$ como combinação linear dos vectores dessa base ordenada. Isto é, determine as coordenadas do vector $(0, -1)$ em cada base ordenada encontrada. Relativamente a cada base ordenada de $\mathbb{R}^2$, determine ainda o vector cujas coordenadas são $(0, -1)$.

   (i) $\{(1, 3), (1, -1)\}$ **(ii)** $\{(0, 0), (1, 2)\}$ **(iii)** $\{(2, 4)\}$

   (iv) $\{(-5, 0), (0, 2)\}$ **(v)** $\{(1, 2), (2, -3), (3, 2)\}$ **(vi)** $\{(1, 0), (0, 1)\}$

27. Diga quais dos seguintes conjuntos de vectores são bases de $\mathbb{R}^3$. Caso não sejam bases, determine subconjuntos desses conjuntos que sejam bases e as dimensões dos espaços gerados por cada um desses subconjuntos. Em cada base de $\mathbb{R}^3$ encontrada, exprima o vector $(-1, 1, -2)$ como combinação linear dos vectores dessa base ordenada. Isto é, determine as coordenadas do vector $(-1, 1, -2)$ em cada base ordenada encontrada. Relativamente a cada base ordenada de $\mathbb{R}^3$, determine ainda o vector cujas coordenadas são $(-1, 1, -2)$.

   (i) $\{(1, 2, 3), (0, 0, 0), (0, 1, 2)\}$ **(ii)** $\{(1, 2, 0), (0, 1, -1)\}$

   (iii) $\{(3, 2, 2), (-1, 2, 1), (0, 1, 0)\}$ **(iv)** $\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$

   (v) $\{(1, 1, -1), (2, 3, 4), (4, 1, -1), (0, 1, -1)\}$ **(vi)** $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

28. Diga quais dos seguintes conjuntos de vectores são bases de $\mathbb{R}^4$. Caso não sejam bases, determine subconjuntos desses conjuntos que sejam bases e as dimensões dos espaços gerados por cada um desses subconjuntos. Em cada alínea indique uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclua pelo menos dois vectores do conjunto apresentado.

   (i) $\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1)\}$

   (ii) $\{(1, -1, 0, 2), (3, -1, 2, 1), (1, 0, 0, 1)\}$

   (iii) $S = \{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\}$

   (iv) $\{(1, 0, 0, 2), (1, 0, 2, 0), (1, 2, 0, 0), (3, 0, 0, 0)\}$

   (v) $\{(1, -2, 5, -3), (2, -4, 6, 2), (3, -6, 11, -1), (0, 0, 5, 5)\}$

   (vi) $S = \{(2, 1, -1, 2), (-1, -1, 1, 2), (4, -2, 2, -2), (5, -2, 2, 2)\}$. Nesta alínea, verifique que $(8, -3, 3, 5) \in L(S)$ e determine uma base de $L(S)$ que inclua o vector $(8, -3, 3, 5)$.

29. Diga quais dos seguintes conjuntos de vectores são bases de $\mathcal{P}_2$ (espaço linear dos polinómios reais de grau menor ou igual a 2). Caso não sejam bases, determine subconjuntos desses conjuntos que sejam bases e as dimensões dos espaços gerados por cada um desses subconjuntos. Determine as coordenadas do vector $1 - t$ em cada base ordenada de $\mathcal{P}_2$ encontrada. Relativamente a cada base ordenada de $\mathcal{P}_2$, determine ainda o vector cujas coordenadas são $(-1, 3, 2)$.

   (i) $\{2 + t - t^2, 2t + 2t^2, -t^2\}$ **(ii)** $\{2t - t^2, 1 - 2t^2, 2 + t, 1 - 4t\}$

   (iii) $\{1 + t^2, t - t^2, 1 - t + 2t^2, 1 + t\}$ **(iv)** $\{-1 + 2t + t^2, 2 - t\}$

   (v) $\{1 + 2t - t^2, 3 + t^2, 5 + 4t - t^2, -2 + 2t - t^2\}$ **(vi)** $\{1, t, t^2\}$

30. Mostre que as matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ formam uma base para o espaço linear $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

31. Seja $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 11 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \right\}$. Seja W um subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ gerado por S. Determine uma base para W que inclua vectores de S.

32. Determine uma base para $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$. Qual é a dimensão do espaço linear $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$?

33. Determine uma base para cada um dos seguintes subespaços de $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e calcule a respectiva dimensão:

(i) O conjunto de todas as matrizes (reais) diagonais do tipo 3×3.

(ii) O conjunto de todas as matrizes (reais) simétricas do tipo 3×3.

34. Determine as dimensões e indique bases para: o núcleo, o espaço das linhas e o espaço das colunas das seguintes matrizes.

(i) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ **(iii)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(iv)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(vi)** $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **(vii)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Determine tambem a característica e a nulidade de cada uma delas.

35. Sejam U e V subespaços de W tais que $\dim U = 4, \dim V = 5$ e $\dim W = 7$. Diga quais as dimensões possíveis para $U \cap V$.

36. Determine bases e calcule as dimensões de $U + V$ e $U \cap V$, dizendo em que casos $U + V$ é a soma directa $U \oplus V$ (determine-a) dos subespaços U e V.

(i) $U = L\left(\{(1,-1,1),(0,1,1)\}\right), V = L\left(\{(1,1,2),(-1,1,1)\}\right)$ em $\mathbb{R}^3$.

(ii) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0 \text{ e } x + y = 0\}$, $V = L\left(\{(1,1,1)\}\right)$ em $\mathbb{R}^3$.

(iii) $U = L\left(\{(1,0,1),(-1,1,2)\}\right), V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 3z = 0\}$ em $\mathbb{R}^3$.

(iv) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}, V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$ em $\mathbb{R}^3$.

(v) $U = L\left(\{1+t, 1-t^2\}\right), \quad V = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 - a_1 + a_0 = 0\}$ em $\mathcal{P}_2$.

(vi) $U = L\left(\{1+t, 1-t^3\}\right), \quad V = L\left(\{1+t+t^2, t-t^3, 1+t+t^3\}\right)$ em $\mathcal{P}_3$.

(vii) $U = L\left(\{(2,-2,1,-2),(-1,1,1,3),(0,0,-6,-8),(-1,1,-5,-5)\}\right)$,
$V = L\left(\{(0,0,0,-1),(0,1,2,3),(0,2,4,8)\}\right)$ em $\mathbb{R}^4$.

(viii) $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y + 3z = 0 \text{ e } y + 2z + 3w = 0\}$,
$V = L\left(\{(2,5,-4,1),(0,9,-6,1),(-4,-1,2,-1)\}\right)$ em $\mathbb{R}^4$.

Neste alínea **(viii)** mostre que $U = V$.

(ix) Seja U o subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado por

$$\{(1,-1,-1,-2,0),(1,-2,-2,0,-3),(1,-1,-2,-2,1)\}.$$

Seja V o subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado por

$$\{(1,-2,-3,0,-2),(1,-1,-3,2,-4),(1,-1,-2,2,-5)\}.$$

Comece por escrever U e V como soluções de sistemas de equações lineares homogéneas.

(x) Sejam U e V subespaços de $\mathbb{R}^4$ gerados respectivamente por F e por G, com

$$\begin{aligned} F &= \{(1,0,-1,0),(0,1,1,1),(1,0,0,-2),(0,0,-1,2)\}, \\ G &= \{(1,1,1,1),(1,2,0,-1),(0,0,1,1)\}. \end{aligned}$$

37. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(i) Calcule a nulidade e a característica de A.

(ii) Determine bases para o espaço das colunas de A e para o núcleo de A.

(iii) Usando a alínea anterior, determine a solução geral do sistema de equações lineares homogéneo $Au = \mathbf{0}$.

(iv) Resolva o sistema de equações $Au = b$, com $b = (1,0,2,-1,0)$. Note que b é igual à 1^a coluna de A e use esse facto de modo a encontrar uma solução particular de $Au = b$.

38. Utilize a informação da seguinte tabela para, em cada caso, determinar a dimensão do espaço gerado pelas linhas de A, do espaço gerado pelas colunas de A, do núcleo de A e do núcleo de A^T. Diga tambem se o correspondente sistema de equações lineares não homogéneo $AX = B$ é possível, determinando para esses casos, o número de parâmetros que entram na solução geral de $AX = B$.

A	3×3	3×3	3×3	5×9	9×5	4×4	6×2
car A	3	2	1	2	2	0	2
car $[A \mid B]$	3	3	1	2	3	0	2

39. Construa uma matriz cujo núcleo seja gerado pelo vector $(2,0,1)$.

40. Existe alguma matriz cujo espaço das linhas contém o vector $(1,1,1)$ e cujo núcleo contém $(1,0,0)$?

41. Quais são as matrizes do tipo 3×3 cujo núcleo tem dimensão 3?

42. Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{C}(A) = \mathcal{N}(A)$. Prove que $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ com n par. Dê um exemplo para $n = 4$.

43. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $\operatorname{car} A = n$ e $A^2 = A$. Prove que $A = I$.

44. Sejam $B_1 = \{(1,2),(0,1)\}$ e $B_2 = \{(1,1),(2,3)\}$ duas bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$. Seja $v = (1,5)$.

(i) Determine as coordenadas de v em relação à base B_1.

(ii) Determine a matriz $S_{B_1\to B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2.

(iii) Determine as coordenadas de v em relação à base B_2, usando as alíneas anteriores.

(iv) Determine, directamente, as coordenadas de v em relação à base B_2.

(v) Determine a matriz $S_{B_2\to B_1}$ de mudança da base B_2 para a base B_1.

(vi) Determine as coordenadas de v em relação à base B_1, usando a alínea anterior, e compare com o resultado obtido em **(i).**

45. Sejam $B_1 = \{v_1, v_2\}$ e $B_2 = \{w_1, w_2\}$ duas bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$, onde

$$v_1 = (1,2), \quad v_2 = (0,1).$$

Suponha que a matriz $S_{B_2\to B_1}$ de mudança da base B_2 para a base B_1, é dada por:

$$S_{B_2\to B_1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine B_2.

46. Sejam $B_1 = \{v_1, v_2\}$ e $B_2 = \{w_1, w_2\}$ duas bases ordenadas de $\mathcal{P}_1$, onde

$$w_1 = -1 + t, \quad w_2 = 1 + t.$$

Suponha que a matriz $S_{B_1\to B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2, é dada por:

$$S_{B_1\to B_2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine B_1.

47. Sejam $B_1 = \{1, 1-t, t^2\}$ e $B_2 = \{1, 1+t, 1+t+t^2\}$ duas bases ordenadas de $\mathcal{P}_2$.

(i) Suponha que as coordenadas de um vector $p(t) \in \mathcal{P}_2$ em relação à base B_2 são dadas por $(1,2,3)$. Determine as coordenadas do mesmo vector $p(t)$ em relação à base B_1.

(ii) Determine a matriz $S_{B_1\to B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2 e utilize-a para determinar as coordenadas do vector $2 - t + t^2$ na base B_2.

48. Sejam $B_1 = \{v_1, v_2\}$ e $B_2 = \{w_1, w_2\}$ duas bases ordenadas de $\mathcal{P}_1$, onde

$$w_1 = t, \quad w_2 = 1 - t.$$

Suponha que a matriz $S_{B_2\to B_1}$ de mudança da base B_2 para a base B_1, é dada por:

$$S_{B_2\to B_1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine B_1.

49. Sejam $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $B_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ duas bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$, onde

$$v_1 = (1,0,1), \quad v_2 = (1,1,0), \quad v_3 = (0,0,1).$$

Suponha que a matriz $S_{B_1 \to B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2, é dada por:

$$S_{B_1 \to B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine B_2.

50. Sejam $B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ e

$$B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

duas bases ordenadas de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Determine a matriz $S_{B_1 \to B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2 e utilize-a para determinar as coordenadas do vector $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ em relação à base B_2.

51. Seja $B = \{v_1, v_2\}$ uma base ordenada de $\mathcal{P}_1$. Sejam $(1,-1)$ e $(2,2)$ respectivamente as coordenadas de dois polinómios $1+t$ e $1-t$ em relação à base B. Determine B.

52. Sejam $B_1 = \{v_1, v_2\}$ e $B_2 = \{w_1, w_2\}$ duas bases ordenadas de $\mathcal{P}_1$. Suponha que $(1,-1)$ e $(2,2)$ são respectivamente as coordenadas de um polinómio $p(t)$ em relação às bases B_1 e B_2. Suponha ainda que $(1,1)$ e $(2,-2)$ são respectivamente as coordenadas de um polinómio $q(t)$ em relação às bases B_1 e B_2. Determine a matriz $S_{B_1 \to B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2.

53. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Determine o n^o real λ para o qual $u = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ é solução da equação: $Au - \lambda u = \mathbf{0}$.

b) Determine uma base para $\mathcal{N}(A)$.

c) Resolva a equação: $Au = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$.

d) Determine todos os vectores b para os quais a equação $Au = b$ tenha sempre solução.

54. Seja $\mathcal{P}_2 = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ o espaço linear real dos polinómios reais de grau menor ou igual a 2. Seja $\mathcal{B} = \{t - t^2, -2 + 2t\}$ uma base ordenada de um subespaço U de $\mathcal{P}_2$.

a) Determine as coordenadas do vector $1 - t^2$ na base $\mathcal{B}$.

b) Determine a base ordenada $\mathcal{B}_1$ de U de tal modo que a matriz de mudança da base $\mathcal{B}_1$ para a base $\mathcal{B}$ seja dada por:

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

c) Sendo $V = L\left(\{-1 + t^2, -2 + t - t^2, 3 - t\}\right)$, determine, justificando, uma base para $U \cap V$.

55. Seja

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & \alpha & 0 & -1 \\ \alpha & -1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & \alpha & 0 & -\alpha \end{bmatrix}, \quad \text{com } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Sejam $\mathcal{C}(A_\alpha)$, $\mathcal{L}(A_\alpha)$ e $\mathcal{N}(A_\alpha)$, respectivamente, o espaço das colunas, o espaço das linhas e o núcleo de A_α. Sejam A_0, A_{-1} e A_1 as matrizes que se obtêm de A_α fazendo respectivamente $\alpha = 0$, $\alpha = -1$ e $\alpha = 1$.

a) Determine uma base para $\mathcal{N}(A_{-1})$.

b) Determine uma base para $\mathcal{C}(A_{-1})$ e calcule as coordenadas de $(0, 0, 0, 1)$ nessa base.

c) Determine a solução geral do sistema de equações lineares $A_0 u = b$, onde b é igual à 1^a coluna da matriz A_0.

d) Determine uma base para $\mathcal{L}(A_1) + \mathcal{C}(A_1)$.

e) Determine uma base para $\mathcal{L}(A_{-1}) \cap \mathcal{C}(A_{-1})$.

56. Considere a matriz dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Determine, justificando, a dimensão do núcleo de A.

b) Diga, justificando, se $\{(1, 0, 0, 0)\}$ é uma base do espaço das colunas de A.

57. Considere o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^4$: $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \ x + y + z + w = 0\}$.

a) Determine uma base para U.

b) Determine uma base para U que inclua os vectores $(1, -1, -1, 1)$ e $(-1, 0, 0, 1)$.

58. Considere em $\mathbb{R}^2$ as bases ordenadas $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ em que $\mathcal{B}_1 = \{(1,-1),(0,1)\}$. Seja

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a matriz de mudança da base $\mathcal{B}_1$ para a base $\mathcal{B}_2$. Determine as coordenadas do vector $(1,1)$ em $\mathcal{B}_2$.

59. Seja $\mathcal{P}_2 = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ o espaço linear real dos polinómios reais de grau menor ou igual a 2. Considere os seguintes subespaços lineares de $\mathcal{P}_2$:

$$V_1 = \{p(t) \in \mathcal{P}_2 : \ p(-1) = 2p(0) - p(1)\} \qquad V_2 = L(\{-1+t, 1-t^2\}).$$

Determine um base para $V_1 \cap V_2$.

60. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sejam $\mathcal{N}(A), \mathcal{L}(A), \mathcal{C}(A)$, respectivamente, núcleo, espaço das linhas e espaço das colunas de A.

a) Determine uma base para $\mathcal{N}(A)$.

b) Determine uma base para $\mathbb{R}^3$ que inclua duas colunas de A.

c) Determine uma base para $\mathcal{L}(A) \cap \mathcal{C}(A)$.

61. Determine as coordenadas de $p(t) = t$ na base ordenada $\{2-t, 2+t\}$ de $\mathcal{P}_1$.

($\mathcal{P}_1$ é o espaço linear dos polinómios reais de grau menor ou igual a 1.)

62. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 4 & a & b \\ c & d & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}).$$

Determine a, b, c, d tais que $\operatorname{nul} A = 2$ e $(1,0,2) \in \mathcal{L}(A)$.

63. Seja U o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por $\{(1,1,0,-1),(1,1,0,1)\}$. Seja

$$S = \{(1,0,0,2)\} + U$$

e considere ainda o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^4$

$$V = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : y = w\right\}.$$

a) Determine um sistema de duas equações lineares cujo conjunto de soluções seja S.

b) Encontre uma matriz A do tipo 2×4 cujo núcleo seja igual a U.

c) Determine uma base para $\mathbb{R}^4$ que inclua dois vectores de U.

d) Sendo $\mathcal{B} = \{(2,2,0,0),(1,1,0,1)\}$ uma base ordenada de U, calcule as coordenadas do vector $(1,1,0,-7)$ em relação a $\mathcal{B}$.

e) Determine uma base para $U + V$ e uma base para $U \cap V$, indicando as respectivas dimensões.