Instituto Superior Técnico - Álgebra Linear - 1^o Semestre 2011/2012

LEAN - LEMat - MEAmbi - MEBiol - MEQ

4^a Ficha de exercícios para as aulas de problemas: 14 Nov. - 25 Nov.

1. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Considere a aplicação $T_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T_{a,b}(x) = ax + b$. Determine os valores de a e de b para os quais $T_{a,b}$ é linear.

2. Diga quais das seguintes transformações são lineares. Determine para cada transformação linear a correspondente matriz que a representa em relação às respectivas bases canónicas (ordenadas). Determine também, se possível, para cada uma dessas transformações lineares, bases para o núcleo $\mathcal{N}(T)$ e para o contradomínio $\mathcal{I}(T)$, bem como as respectivas dimensões (de $\mathcal{N}(T)$ e de $\mathcal{I}(T)$). Diga ainda quais são injectivas, sobrejectivas e bijectivas.

   (i) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x, y) = (x + 2y, 3x - y)$.

   (ii) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x, y) = (1 - y, 2x)$.

   (iii) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $T(x, y, z) = (x, 2x, -x)$.

   (iv) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x, y, z) = (0, 0)$.

   (v) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ com $T(x, y) = -3x$.

   (vi) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $T(x, y, z) = (0, -1, 2)$.

   (vii) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ com $T(x) = (2x, 0, -x)$.

   (viii) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x, y, z) = (x^2 - y, 2y)$.

   (ix) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x, y, z, w) = (x - y, 3w)$.

   (x) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ com $T(x, y, z) = (-z, y - 2z, 2y, y + z)$.

   (xi) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ com $T(x) = (0, 0)$.

   (xii) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $T(x, y, z) = (x + 2y, 3z, x - z)$.

   (xiii) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $T(x, y, z) = (x, y, z)$.

   (xiv) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x, y) = (x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta, x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$. Aplicação que ao ponto de coordenadas (x, y) faz corresponder o ponto obtido por uma rotação de amplitude θ em torno da origem e no sentido contrário ao dos ponteiros de um relógio.

   (xv) $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ com $T(p(t)) = 2p(1 - t) - tp'(t)$,

   onde $\mathcal{P}_2 = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ e p' é a derivada de 1^a ordem de p.

   (xvi) $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ com

$$T(p(t)) = p(0) - p(-1) + (p(-1) + p(1))\, t + (p(-1) - p(1) - 2p(0))\, t^2.$$

   (xvii) $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ com $T(p(t)) = \begin{bmatrix} p(1) & p(0) \\ p(0) & p(-1) \end{bmatrix}$.

3. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ é representada pela matriz

$$M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine a expressão geral de T, isto é, determine $T(x,y,z)$ para qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Determine, se possível, bases para o núcleo $\mathcal{N}(T)$ e para o contradomínio $\mathcal{I}(T)$, bem como as respectivas dimensões (de $\mathcal{N}(T)$ e de $\mathcal{I}(T)$).

4. Considere a base ordenada $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, em que $v_1 = (1,1)$ e $v_2 = (1,0)$ e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que

$$T(v_1) = (1,-2), \quad T(v_2) = (-3,1).$$

(i) Calcule $T(2,1)$.

(ii) Determine a expressão geral de T, isto é, determine $T(x,y)$ para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(iii) Determine a matriz $M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)$ que representa T em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^2$.

(iv) Determine as matrizes de mudança de base $S_{\mathcal{B}_c^2 \to \mathcal{B}}$ e $S_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}_c^2}$. Determine as coordenadas do vector $(2,1)$ na base $\mathcal{B}$.

(v) Determine a matriz $M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})$ que representa T em relação à base ordenada $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$. Determine as coordenadas do vector $T(2,1)$ na base $\mathcal{B}$.

(vi) Determine a matriz $M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B})$ que representa T em relação às bases ordenadas $\mathcal{B}_c^2$ e $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$.

(vii) Determine a matriz $M(T;\mathcal{B};\mathcal{B}_c^2)$ que representa T em relação às bases ordenadas $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^2$.

5. Considere as transformações lineares T_1 e T_2 cujas matrizes que as representam em relação às bases canónicas (ordenadas) de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ são dadas respectivamente por

$$M(T_1;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine as expressões gerais de $(T_1 \circ T_2)(x,y)$ e $(T_2 \circ T_1)(x,y,z)$ para quaisquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

6. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y,z) = (2y, y-x, -x).$$

Determine a matriz $M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})$ que representa T em relação à base ordenada

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\} \ \text{ de } \ \mathbb{R}^3 \ \text{ com } \ v_1 = (1,0,-1), \quad v_2 = (1,2,0), \quad v_3 = (-1,1,1).$$

7. Seja

$$\mathcal{B}_c^{2\times 2} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

a base canónica (ordenada) de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Considere a transformação linear

$$S : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \text{ definida por } S(A) = A^T.$$

Determine a matriz $M(S; \mathcal{B}_c^{2\times 2}; \mathcal{B}_c^{2\times 2})$ que representa S em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^{2\times 2}$.

8. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e a base canónica (ordenada)

$$\mathcal{B}_c^3 = \{v_1, v_2, v_3\} \text{ de } \mathbb{R}^3, \text{ com } v_1 = (1,0,0), \quad v_2 = (0,1,0), \quad v_3 = (0,0,1).$$

Suponha que se tem

$$T(v_3) = 3v_1 + v_2 - 2v_3, \qquad T(v_2 + v_3) = v_1, \qquad T(v_1 + v_2 + v_3) = v_2 + v_3.$$

(i) Calcule $T(2v_1 - v_2 + 3v_3)$.

(ii) Determine a matriz $M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)$ que representa T em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^3$ de $\mathbb{R}^3$.

(iii) Determine duas bases ordenadas $\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ de modo a que a matriz $M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2)$ que represente T em relação a essas bases $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ seja a matriz identidade:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que em relação às bases ordenadas $\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B}_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ com

$$u_1 = (1,1), \quad u_2 = (2,-1), \quad v_1 = (1,0,1), \quad v_2 = (1,1,2), \quad v_3 = (0,1,-1),$$

é representada pela matriz

$$M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Considere ainda as bases ordenadas $\mathcal{B}_1' = \left\{u_1', u_2'\right\}$ de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B}_2' = \left\{v_1', v_2', v_3'\right\}$ de $\mathbb{R}^3$ com

$$u_1' = (1,0), \quad u_2' = (1,1), \quad v_1' = (1,0,0), \quad v_2' = (1,1,0), \quad v_3' = (1,1,1).$$

(i) Determine as coordenadas do vector $T(-1,2)$ na base $\mathcal{B}_2$.

(ii) Determine as coordenadas do vector $(-1,2)$ na base $\mathcal{B}_1'$.

(iii) Determine as coordenadas do vector $T(-1,2)$ na base $\mathcal{B}_2'$.

(iv) Determine, se possível, uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{N}(T)$. Diga se T é injectiva.

(v) Determine, se possível, uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{I}(T)$. Diga se T é sobrejectiva.

(vi) Determine a expressão geral de T, isto é, determine $T(x, y)$ para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(vii) Determine a matriz $M(T; \mathcal{B}_1'; \mathcal{B}_2')$ que representa T em relação às bases ordenadas $\mathcal{B}_1'$ e $\mathcal{B}_2'$.

10. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y, z) = (x + y, x + y - z).$$

(i) Determine a matriz $M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^2)$ que representa T em relação às bases canónicas (ordenadas) $\mathcal{B}_c^3$ e $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ respectivamente.

(ii) Determine, se possível, uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{N}(T)$. Diga se T é injectiva.

(iii) Determine, se possível, uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{I}(T)$. Diga se T é sobrejectiva.

(iv) Determine a solução geral da equação linear $T(x, y, z) = (1, 1)$.

(v) Considere a equação linear $T(x, y, z) = (a, b)$. Verifique se existe algum vector $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ para o qual essa equação seja impossível.

(vi) Considere a equação linear $T(x, y, z) = (a, b)$. Verifique se existe algum vector $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ para o qual essa equação seja possível e determinada.

11. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz $M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)$ que a representa em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^3$ de $\mathbb{R}^3$ é dada por

$$M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(i) Determine a expressão geral de T, isto é, determine $T(x, y, z)$ para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(ii) Determine, se possível, uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{N}(T)$. Diga se T é injectiva.

(iii) Determine, se possível, uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{I}(T)$. Diga se T é sobrejectiva.

(iv) Determine a solução geral da equação linear $T(x, y, z) = (3, 3, 0)$.

(v) Considere a equação linear $T(x, y, z) = (a, b, c)$. Verifique se existe algum vector $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ para o qual essa equação seja impossível.

(vi) Considere a equação linear $T(x, y, z) = (a, b, c)$. Verifique se existe algum vector $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ para o qual essa equação seja possível e indeterminada.

12. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz $M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})$ que a representa em relação à base (ordenada) $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ com

$$v_1 = (1, 1, 1), \quad v_2 = (1, 1, 0), \quad v_3 = (1, 0, 0),$$

é dada por

$$M(T;\mathcal{B};\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(i) Determine, se possível, uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{N}(T)$. Diga, justificando, se T é sobrejectiva e se T é injectiva.

(ii) Determine, se possível, uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{I}(T)$.

(iii) Mostre que a equação linear $T(x,y,z) = (2,4,0)$ não tem soluções.

(iv) Determine $T(1,1,1)$ e resolva a equação linear $T(x,y,z) = (-1,-1,-\frac{1}{3})$.

(v) Considere a equação linear $T(x,y,z) = (a,b,c)$. Verifique se existe algum vector $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ para o qual essa equação seja possível e indeterminada.

(vi) Determine a expressão geral de T, isto é, determine $T(x,y,z)$ para qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

13. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y,z) = (x+y+z, x+2y-4z, z).$$

(i) Determine a matriz $M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)$ que representa T em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^3$ de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Mostre que T é injectiva e determine a expressão geral de T^{-1}, isto é, determine $T^{-1}(x,y,z)$ para qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(iii) Justifique que T é um isomorfismo.

(iv) Determine a solução geral da equação linear $T(x,y,z) = (1,1,2)$.

14. Seja

$$\mathcal{B}_c^{2\times 2} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

a base canónica (ordenada) de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Considere a transformação

$$T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \text{ definida por } T(X) = AX - XA, \quad \text{com} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(i) Verifique que T é linear.

(ii) Determine a expressão geral de T.

(iii) Determine a matriz $M(T;\mathcal{B}_c^{2\times 2};\mathcal{B}_c^{2\times 2})$ que representa T em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^{2\times 2}$ de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(iv) Determine, se possível, uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{N}(T)$. Diga se T é injectiva.

(v) Determine, se possível, uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{I}(T)$. Diga se T é sobrejectiva.

15. Considere as transformações lineares $T_1, T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidas respectivamente por

$$T_1(x, y) = (x + y, x - y) \quad \text{e} \quad T_2(x, y) = (2x + y, x - 2y).$$

(i) Determine as matrizes $M(T_1; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2)$ e $M(T_2; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2)$ que representam respectivamente T_1 e T_2 em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^2$.

(ii) Determine a matriz $A = M(T_2 \circ T_1; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2)$ que representa $T_2 \circ T_1$ em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^2$.

(iii) Determine, usando a alínea anterior, a expressão geral de $T_2 \circ T_1$, isto é, $(T_2 \circ T_1)(x, y)$ para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(iv) Determine, directamente a partir das expressões de T_1 e de T_2, a expressão geral de $T_2 \circ T_1$.

(v) Mostre que T_1 e T_2 são invertíveis.

(vi) Determine as expressões gerais de $T_1^{-1}(x, y), T_2^{-1}(x, y)$ e $\left(T_1^{-1} \circ T_2^{-1}\right)(x, y)$ para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(vii) Determine a matriz $M((T_2 \circ T_1)^{-1}; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2)$ que representa $(T_2 \circ T_1)^{-1}$ em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^2$ e verifique que é igual a A^{-1}, onde A é a matriz determinada em **(ii)**.

(viii) Verifique que $(T_2 \circ T_1)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$.

16. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que em relação à base canónica ordenada $(\mathcal{B}_c^2 = \{(1, 0), (0, 1)\})$ de $\mathbb{R}^2$ é representada pela matriz:

$$M\left(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Justifique que T é injectiva e resolva a equação linear $T(x, y) = (1, 2)$.

17. Considere a transformação linear $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $T_1(x, y) = x$. Seja

$$M\left(T_2; \mathcal{B}_c^1; \mathcal{B}_c^2\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a matriz que representa a aplicação linear $T_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ em relação às bases canónicas ordenadas $\mathcal{B}_c^1 = \{1\}$ e $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$ respectivamente. Determine uma base para o núcleo: $\mathcal{N}(T_2 \circ T_1)$.

18. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuja representação matricial em relação as bases ordenadas $\mathcal{B}_1 = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}_2 = \{(1, 1), (0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ é dada pela matriz:

$$M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Determine uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T)$ e diga, justificando, se T é sobrejectiva.

19. Considere a transformação linear $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T_1(x, y, z) = (2x+y, y+2z)$. Considere ainda a transformação linear $T_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuja representação matricial em relação à base (ordenada) $\mathcal{B} = \{(2, 1), (1, 2)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e à base canónica $\mathcal{B}_c^3$ de $\mathbb{R}^3$ é dada pela matriz:

$$M(T_2; \mathcal{B}; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(i) Determine uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T_1)$ de T_1 e diga, justificando, se T_1 é sobrejectiva.

(ii) Determine uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T_2)$ de T_2 e diga, justificando, se T_2 é injectiva.

(iii) Diga, justificando, se se tem $\mathcal{N}(T_1) + \mathcal{I}(T_2) = \mathbb{R}^3$ e determine a dimensão de $\mathcal{N}(T_1) \cap \mathcal{I}(T_2)$.

(iv) Determine a matriz $M(T_2; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^3)$ que representa T_2 em relação às bases canónicas $\mathcal{B}_c^2$ e $\mathcal{B}_c^3$ de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ respectivamente.

(v) Determine a solução geral da equação $(T_1 \circ T_2)(x, y) = \left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

20. Considere a transformação linear $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T_1(x, y) = (2x+y, 0, x+2y)$. Considere ainda a transformação linear $T_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuja representação matricial em relação à base (ordenada) $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e à base canónica $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^2$ é dada pela matriz:

$$M(T_2; \mathcal{B}; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(i) Determine $T_2(0, 1, 0)$ e $T_2(0, 0, 1)$.

(ii) Determine uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T_1)$ de T_1 e diga, justificando, se T_1 é sobrejectiva.

(iii) Determine uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T_2)$ de T_2 e diga, justificando, se T_2 é injectiva.

(iv) Determine a solução geral da equação $(T_2 \circ T_1)(x, y) = (-1, 1)$.

21. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_3$ definida por

$$T(1, 1, -1) = 2 + 2t^2, \quad T(1, -1, 1) = -t - t^3 \quad \text{e} \quad T(-1, 1, 1) = 2 + t + 2t^2 + t^3.$$

(i) Determine a expressão geral de T, isto é, determine $T(x, y, z)$ para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(ii) Determine, se possível, uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{N}(T)$. Diga se T é injectiva.

(iii) Determine, se possível, uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{I}(T)$. Diga se T é sobrejectiva.

(iv) Resolva, em $\mathbb{R}^3$, a equação linear $T(x, y, z) = 1 + t + t^2 + t^3$.

22. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Considere a transformação linear $T_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2$ definida por

$$T_\lambda(x, y, z) = z - y + \lambda\,(y - x)\,t + xt^2.$$

(i) Determine, se possível, uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T_\lambda)$. Determine a dimensão de $\mathcal{N}(T_\lambda)$. Diga se T_λ é injectiva.

(ii) Determine, se possível, uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T_\lambda)$. Determine a dimensão de $\mathcal{I}(T_\lambda)$. Diga se T_λ é sobrejectiva.

(iii) Considere $\lambda = 0$ e resolva a equação linear $T_0(x, y, z) = 1 + t^2$.

23. Considere o espaço linear $\mathcal{P}_2$ dos polinómios reais de variável real e de grau menor ou igual a 2. Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por

$$T\,(p\,(t)) = p'\,(t) - 2p\,(t)\,,$$

onde $p'\,(t)$ é a derivada de primeira ordem de $p\,(t)$.

(i) Determine a expressão geral de T.

(ii) Sendo $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ a base canónica (ordenada) de $\mathcal{P}_2$, determine a matriz $M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})$ que representa T em relação à base $\mathcal{B}$.

(iii) Justifique que T é um isomorfismo e verifique que a expressão geral do isomorfismo T^{-1} é dada por

$$T^{-1}\,(p\,(t)) = -\frac{1}{2}p\,(t) - \frac{1}{4}p'\,(t) - \frac{1}{8}p''\,(t)$$

para todo o $p\,(t) \in \mathcal{P}_2$, onde $p''\,(t)$ é a derivada de segunda ordem de $p\,(t)$.

(iv) Resolva, em $\mathcal{P}_2$, a equação diferencial linear $p'\,(t) - 2p\,(t) = (2 - 3t)^2$.

24. Considere o espaço linear $\mathcal{P}_2$ dos polinómios reais de variável real e de grau menor ou igual a 2. Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por

$$T\,(p\,(t)) = t^2 p''\,(t) - 2p\,(t)\,,$$

onde $p''\,(t)$ é a derivada de segunda ordem de $p\,(t)$.

(i) Determine a expressão geral de T.

(ii) Sendo $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ a base canónica (ordenada) de $\mathcal{P}_2$, determine a matriz $M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})$ que representa T em relação à base $\mathcal{B}$.

(iii) Determine, se possível, uma base para $\mathcal{N}\,(T)$ e uma base para $\mathcal{I}\,(T)$ e diga, justificando, se T é injectiva e/ou sobrejectiva.

(iv) Resolva, em $\mathcal{P}_2$, as equações diferenciais lineares:

a) $t^2 p''\,(t) - 2p\,(t) = 2 - t$; **b)** $2tp'\,(t) - 2p\,(0) = 2 - t$.

25. Seja U o subespaço das matrizes simétricas de $\mathcal{M}_{2\times 2}\,(\mathbb{R})$, isto é,

$$U = \left\{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}\,(\mathbb{R}) : A = A^T\right\}.$$

Considere a transformação linear $T : U \to U$ definida por

$$T\,(A) = AB + BA$$

com $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(i) Determine a expressão geral de T.

(ii) Determine uma base para U e calcule a matriz que representa T em relação a essa base.

(iii) Determine, se possível, uma base para $\mathcal{N}(T)$ e uma base para $\mathcal{I}(T)$ e diga, justificando, se T é injectiva e/ou sobrejectiva.

(iv) Resolva, em U, a equação linear $T(A) = B$.

26. Considere a transformação linear $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3$ cuja matriz $M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2)$ que a representa em relação às bases ordenadas

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $\mathcal{B}_2 = \{1+t, t+t^2, t^2+t^3, t^3\}$ de $\mathcal{P}_3$ é dada por

$$M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(i) Determine a expressão geral de T.

(ii) Justifique que T é um isomorfismo e determine a expressão geral do isomorfismo T^{-1}, isto é, determine

$$T^{-1}\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3\right).$$

(iii) Resolva a equação linear $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 1 + 2t + 3t^2 + 4t^3$.

27. Seja U o espaço linear das funções reais de variável real duas vezes diferenciáveis. Considere a transformação linear $T : U \to U$ definida por

$$T(f) = f'' - 2f' + f.$$

Considere o subespaço $S = \{f \in U : f'' - 2f' + f = \mathbf{0}\}$ de U.

(i) Mostre que o conjunto $\{e^t, te^t\}$ é uma base de S. Sugestão: Mostre que se $f \in S$, então $f(t)\, e^{-t}$ é um polinómio de grau menor ou igual a 1.

(ii) Mostre que dados $a, b \in \mathbb{R}$, existe uma única função $f \in S$ tal que $f(0) = a$ e $f'(0) = b$.

(iii) Determine a única solução f da equação diferencial linear $T(f) = 1$ que verifica $f(0) = 1$ e $f'(0) = 0$.

28. Seja V o subespaço linear de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vectores $v_1 = (1, 0, 0, -1)$ e $v_2 = (0, 1, -1, 0)$. Considere ainda a transformação linear $T : V \to V$ tal que

$$T(v_1) = v_2, \qquad T(v_2) = -v_1.$$

(i) Determine a matriz $M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})$ que representa T em relação à base ordenada $\mathcal{B}=\{v_1,v_2\}$ de V.

(ii) Encontre, em V, a solução geral da equação $T(u)=(2,-3,3,-2)$.

(iii) Sejam $w_1=(0,0,1,1)$, $w_2=(0,0,0,1)$ e considere a transformação linear $R:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ definida por

$$R(v_1)=v_2, \qquad R(v_2)=-v_1, \qquad R(w_1)=R(w_2)=(0,0,0,0).$$

Encontre, em $\mathbb{R}^4$, a solução geral da equação $R(u)=(2,-3,3,-2)$.

29. Seja $\mathcal{P}_n$, com $n\in\mathbb{N}$, o espaço linear real dos polinómios reais de variável real e de grau menor ou igual a n. Considere a transformação linear $T_1:\mathcal{P}_2\to\mathcal{P}_1$ cuja representação matricial em relação às bases ordenadas $\mathcal{B}_1=\{1+t,1-t,t^2\}$ de $\mathcal{P}_2$ e $\mathcal{B}_2=\{1+t,1+2t\}$ de $\mathcal{P}_1$, é dada pela matriz:

$$M(T_1;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

Considere ainda a transformação linear $T_2:\mathcal{P}_1\to\mathcal{P}_2$ tal que

$$T_2(1)=1-t \qquad\qquad T_2(t)=2+8t-2t^2.$$

a) Determine a matriz $M(T_2;\mathcal{B};\mathcal{B}_1)$ que representa T_2 em relação às bases ordenadas $\mathcal{B}=\{1,t\}$ de $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{B}_1=\{1+t,1-t,t^2\}$ de $\mathcal{P}_2$.

b) Determine uma base para $\mathcal{N}(T_1)$ (núcleo de T_1) e diga, justificando, se T_1 é sobrejectiva.

c) Determine $T_1(t)$ e encontre, em $\mathcal{P}_2$, a solução geral da equação $T_1(p\,(t))=t$.

d) Verifique que $T_1\circ T_2=I$.

30. Considere a transformação linear $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ cuja representação matricial em relação às bases ordenadas $B_c=\{(1,0,0)),(0,1,0),(0,0,1)\}$ e $B'=\{(1,1,0)),(1,-1,1),(0,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ é dada por:

$$M(T;B_c;B')=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 2\end{bmatrix}.$$

a) Determine uma base para o núcleo de T e indique a sua dimensão.

b) Determine uma base para o contradomínio de T e indique a sua dimensão.

c) Determine a expressão geral de T, isto é, determine $T\,(x,y,z)$, para todo $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

31. Seja $\mathcal{P}_2=\{p\,(t)=a_0+a_1t+a_2t^2: a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}\}$ o espaço linear de todos os polinómios reais de variável real e de grau menor ou igual a 2, com as operações usuais.

a) Considere a transformação linear $T_1:\mathcal{P}_2\to\mathcal{P}_2$ cuja representação matricial em relação à base ordenada $B=\{1,t,t^2\}$ de $\mathcal{P}_2$ é dada por:

$$M(T_1;B;B)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Determine uma base para o contradomínio de T_1 e indique a sua dimensão. Diga, justificando, se T_1 é injectiva.

b) Considere a transformação linear $T_2 : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por

$$T_2(p(t)) = (tp'(t))',$$

onde $p'(t)$ é a derivada de 1^a ordem de $p(t)$. Resolva em $\mathcal{P}_2$, a equação linear

$$T_2(p(t)) = \frac{1}{2} + 2t.$$

32. Sejam $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ o espaço linear de todas as matrizes reais do tipo 2×2 e $\mathcal{P}_2$ o espaço linear de todos os polinómios reais de variável real e de grau menor ou igual a 2, ambos com as operações usuais. Seja U o subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ gerado por

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

e seja V o subespaço de $\mathcal{P}_2$ gerado por

$$\left\{ 1 + t, t + t^2 \right\}.$$

Considere a transformação linear $T : U \to V$ definida por:

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right) = t + t^2 \quad \text{e} \quad T\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) = 1 + t.$$

a) Determine a matriz que representa a aplicação linear T em relação às bases

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \qquad \text{e} \qquad \left\{ 1 + 2t + t^2, 1 - t^2 \right\}$$

de U e V respectivamente.

b) Determine a expressão geral de T, isto é, determine

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right),$$

para todo o $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in U$.

33. Seja $\mathcal{P}_2 = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ o espaço linear de todos os polinómios reais de variável real e de grau menor ou igual a 2, com as operações usuais. Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por

$$T(p(t)) = 2p(0) - tp'(t),$$

onde $p'(t)$ é a derivada de 1^a ordem de $p(t)$.

a) Determine a matriz $M(T; B; B)$ que representa a aplicação linear T em relação à base $B = \{1, t, t^2\}$ de $\mathcal{P}_2$.

b) Determine uma base para o contradomínio de T e indique a sua dimensão. Diga, justificando, se T é injectiva.

34. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ cuja representação matricial em relação às bases ordenadas $\mathcal{B}_1 = \{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}_2 = \{(1,-1),(1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ é dada por:

$$M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

a) Determine uma base para o núcleo de T e indique a sua dimensão. Diga, justificando, se T é sobrejectiva.

b) Determine $T(1,0,1)$ e resolva em $\mathbb{R}^3$, a equação linear $T(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

35. Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço linear real dos polinómios reais de grau menor ou igual a 2. Considere a base ordenada $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ de $\mathcal{P}_2$ onde

$$p_1(t) = 1 + 2t + 3t^2, \quad p_2(t) = 2 + 3t, \quad p_3(t) = 1.$$

Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por:

$$T(p_1(t)) = p_2(t), \qquad T(p_2(t)) = p_3(t), \qquad T(p_3(t)) = 0.$$

a) Determine a matriz $M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})$ que representa T na base $\mathcal{B}$.

b) Calcule $T^3(p(t))$, para todo o $p(t) \in \mathcal{P}_2$.

c) Determine uma base para o núcleo de T e uma base para o contradomínio de T.

d) Resolva, em $\mathcal{P}_2$, a equação linear $T(p(t) = 3 + 3t$.