

1. Diga quais das seguintes aplicações $\langle, \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definem em \mathbb{R}^2 um produto interno.

(i) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2$

(ii) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 3x_2 y_2$

(iii) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = -2x_1 y_1 + 3x_2 y_2$

2. Diga quais das seguintes aplicações $\langle, \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definem em \mathbb{R}^3 um produto interno.

(i) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$

(ii) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_2 - x_2 y_1$

(iii) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 2x_1 y_1 + x_1 y_3 + x_3 y_1 + 2x_2 y_2 + x_3 y_3$

3. Determine um produto interno em \mathbb{R}^2 tal que $\langle (1, 0), (0, 1) \rangle = 2$.

4. Considere os vectores $u = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ e $v = \left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}}\right)$. Verifique que o conjunto $\{u, v\}$ é ortonormado relativamente ao produto interno definido em \mathbb{R}^2 por:

$$\langle u, v \rangle = 3u_1 v_1 + 2u_2 v_2,$$

onde $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$. Verifique porém que o mesmo conjunto $\{u, v\}$ não é ortonormado relativamente ao produto interno usual definido em \mathbb{R}^2 .

5. Considere em \mathbb{R}^4 o produto interno usual. Determine o subespaço de \mathbb{R}^4 ortogonal aos vectores $(1, 0, 0, 0)$ e $(1, 0, 0, 1)$.

6. Considere em \mathbb{R}^3 o produto interno definido por:

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

(i) Calcule $\|u\|$, para qualquer vector $u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

(ii) Considere os vectores $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (-1, 1, 0)$ e $u_3 = (0, 0, 1)$. Calcule os ângulos formados pelos vectores: u_1 e u_2 ; u_1 e u_3 ; u_2 e u_3 .

(iii) Justifique que o conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base ortonormada de \mathbb{R}^3 . Calcule as coordenadas de um vector $u \in \mathbb{R}^3$ em relação a esta base.

7. Considere \mathbb{R}^4 com o produto interno usual. Determine uma base ortonormada para o subespaço de \mathbb{R}^4 gerado pelos vectores:

$$(1, 0, -1, 0), (-1, 2, 0, 1) \text{ e } (2, 0, 2, 1).$$

8. Considere \mathbb{R}^3 com o produto interno usual. Considere também os seguintes subespaços de \mathbb{R}^3 :

$$U = L(\{(0, 1, 1), (0, 0, 1)\}) \quad \text{e} \quad V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y - z = 0\}.$$

(i) Determine uma base ortogonal para U e uma base ortonormada para V .

(ii) Determine duas bases ortonormadas para \mathbb{R}^3 : uma que inclua dois vetores de U e outra que inclua dois vetores de V .

(iii) Determine o elemento de U mais próximo de $(1, 1, 1)$ e a distância entre $(1, 1, 1)$ e V^\perp .

9. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e considere o produto interno usual. Sejam $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{C}(A)$ e $\mathcal{L}(A)$ respectivamente o núcleo, espaço das colunas e espaço das linhas de A .

(i) Determine uma base ortonormada para \mathbb{R}^3 que inclua dois vetores de $\mathcal{C}(A)$.

(ii) Determine o elemento de $\mathcal{L}(A)$ mais próximo de $(1, 1, 1)$ e a distância entre $(1, 1, 1)$ e $\mathcal{N}(A)$.

10. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e considere o produto interno usual. Sejam $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{C}(A)$ e $\mathcal{L}(A)$ respectivamente o núcleo, espaço das colunas e espaço das linhas de A .

(i) Determine uma base ortonormada para $(\mathcal{N}(A))^\perp$ (o complemento ortogonal do núcleo de A).

(ii) Determine uma base ortonormada para \mathbb{R}^3 que inclua dois vetores de $\mathcal{C}(A)$.

(iii) Determine o elemento de $\mathcal{L}(A)$ mais próximo de $(1, 2, 3)$ e a distância entre $(1, 2, 3)$ e $(\mathcal{L}(A))^\perp$.

11. Considere em \mathbb{R}^4 o seguinte subespaço: $U = L(\{(1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1)\})$. Determine uma matriz A do tipo 2×4 cujo núcleo seja igual a U , isto é, tal que $U = \mathcal{N}(A)$.

12. Defina o produto interno em \mathbb{R}^2 em relação ao qual a base $\{(1, 0), (1, -1)\}$ é ortonormada.

13. Considere a aplicação $\langle, \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 4x_2y_2 + x_3y_3.$$

(i) Verifique que \langle, \rangle define um produto interno em \mathbb{R}^3 .

(ii) Seja $V = L(\{(3, 4, 0)\}) \subset \mathbb{R}^3$. Diga qual é o ponto de V mais próximo de $(0, 1, 0)$.

(iii) Determine uma base ortogonal para o complemento ortogonal de V , em relação ao produto interno \langle, \rangle .

(iv) Seja $P_V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a projecção ortogonal de \mathbb{R}^3 sobre V . Indique, em relação ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, uma base ortonormada de \mathbb{R}^3 para a qual a representação matricial de P_V seja dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

14. Seja U o subespaço de \mathbb{R}^3 gerado pelos vectores $v_1 = (0, 1, 0)$ e $v_2 = (\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5})$. Escreva $u = (1, 2, 3)$ na forma $u = u_1 + u_2$, com $u_1 \in U$ e $u_2 \in U^\perp$.

15. Considere \mathbb{R}^4 com o produto interno usual. Em cada alínea seguinte, determine uma base ortogonal para o complemento ortogonal de U , isto é, para U^\perp .

(i) $U = L(\{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 1)\})$

(ii) $U = L(\{(1, 0, 1, 1)\})$

(iii) $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y + z + 2w = 0\}$

(iv) $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - z = 0 \text{ e } 2x - y + 2z - w = 0\}$

16. Considere \mathbb{R}^3 com o produto interno usual. Considere também o seguinte subespaço de \mathbb{R}^3 :

$$U = L(\{(1, 1, 1), (1, 0, 0)\}).$$

(i) Determine uma base ortogonal para U .

(ii) Determine $u \in U$ e $v \in U^\perp$ tais que

$$(3, 2, 1) = u + v.$$

(iii) Determine a distância entre o ponto $(1, 0, 1)$ e o plano $\{(1, 1, 0)\} + U$.

(iv) Determine a distância entre o ponto (x, y, z) e o plano U .

17. Considere \mathbb{R}^4 com o produto interno usual. Considere também o seguinte subespaço de \mathbb{R}^4 :

$$U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z = 0 \text{ e } y - z + w = 0\}.$$

(i) Determine uma base ortonormada para U .

(ii) Determine uma base ortonormada para U^\perp .

(iii) Determine as projecções ortogonais de $(0, 0, 1, 0)$ sobre U e U^\perp respectivamente.

(iv) Determine as representações matriciais de $P_U : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ e de $P_{U^\perp} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ em relação à base canónica de \mathbb{R}^4 .

(v) Determine a distância entre o ponto $(0, 0, 1, 0)$ e o subespaço U .

(vi) Determine a distância entre o ponto (x, y, z, w) e o subespaço U .

18. Considere $P_2 = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ a aplicação $\langle, \rangle : P_2 \times P_2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\langle p(t), q(t) \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

Considere também o seguinte subespaço de P_2 : $U = \{p(t) \in P_2 : p(0) = 0\}$.

- (i) Verifique que \langle, \rangle define um produto interno em P_2 .
 - (ii) Determine uma base ortonormada para U .
 - (iii) Determine uma base ortonormada para U^\perp .
 - (iv) Determine as projecções ortogonais do polinómio $1 + t$ sobre U e U^\perp respectivamente.
 - (v) Determine as representações matriciais de $P_U : P_2 \rightarrow P_2$ e de $P_{U^\perp} : P_2 \rightarrow P_2$ em relação à base canónica $\{1, t, t^2\}$ de P_2 .
 - (vi) Determine a distância entre $1 + t$ e U .
 - (vii) Determine a distância entre o polinómio $a_0 + a_1t + a_2t^2$ e o subespaço U .
19. Considere a aplicação $\langle, \rangle : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^T).$$

Considere também o subespaço U de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ constituído por todas as matrizes simétricas reais do tipo 2×2 :

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : b = c \right\}.$$

- (i) Verifique que \langle, \rangle define um produto interno em $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
- (ii) Determine uma base ortonormada para U .
- (iii) Determine uma base ortonormada para U^\perp .
- (iv) Determine as representações matriciais de $P_U : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ e de $P_{U^\perp} : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ em relação à base canónica

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

- (v) Determine as projecções ortogonais da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sobre U e U^\perp respectivamente.
- (vi) Qual é a matriz simétrica mais próxima da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$?
- (vii) Determine a distância entre $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e U .
- (viii) Determine a distância entre $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e U .

20. Considere \mathbb{R}^3 com o produto interno usual. Considere também o seguinte subespaço de \mathbb{R}^3 :

$$U = L(\{(1, 0, -1), (0, -1, 1)\}).$$

- a) Determine uma base ortogonal para U .
 b) Determine uma base ortonormada para \mathbb{R}^3 que inclua dois vectores geradores de U .
 c) Determine a projecção ortogonal de $(1, 0, 0)$ sobre U^\perp , isto é, $P_{U^\perp}(1, 0, 0)$.
 d) Determine a distância do ponto $(1, 0, 0)$ a U^\perp .
21. Seja

$$P_2 = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

o espaço linear dos polinómios de grau menor ou igual a 2. Considere a aplicação $\langle, \rangle : P_2 \times P_2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\langle a_0 + a_1t + a_2t^2, b_0 + b_1t + b_2t^2 \rangle = 3a_0b_0 + a_1b_1 + 2a_2b_2. \quad (*)$$

Considere também o seguinte subespaço de P_2 :

$$W = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in P_2 : p(0) = p(1) \text{ e } p(1) = p(-1)\}.$$

- a) Verifique que a aplicação \langle, \rangle define em P_2 um produto interno.
 b) Determine uma base ortonormada para W^\perp , relativamente ao produto interno (*).
22. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e considere o produto interno usual. Sejam $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{C}(A)$ e $\mathcal{L}(A)$ respectivamente o núcleo, espaço das colunas e espaço das linhas de A .
- a) Determine uma base ortogonal para $\mathcal{L}(A)$.
 b) Determine uma base ortonormada para \mathbb{R}^3 que inclua dois vectores de $\mathcal{C}(A)$.
 c) Determine o elemento de $(\mathcal{N}(A))^\perp$ mais próximo de $(-1, 1, -1)$ e a distância entre $(-1, 1, -1)$ e $(\mathcal{L}(A))^\perp$.
23. Considere \mathbb{R}^3 com o produto interno usual. Seja U o subespaço de \mathbb{R}^3 gerado pelo conjunto

$$\{(1, 0, -1), (0, 1, 2)\}.$$

- a) Determine uma base ortogonal para U .
 b) Determine $u \in U$ e $v \in U^\perp$ tais que

$$(2, -3, 4) = u + v.$$

- c) Determine a distância entre o ponto $(2, 3, 7)$ e o plano $\{(1, 2, 3)\} + U$.

24. Considere \mathbb{R}^3 com o produto interno usual. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sejam $\mathcal{C}(A)$, $\mathcal{L}(A)$ e $\mathcal{N}(A)$, respectivamente, o espaço das colunas, o espaço das linhas e o núcleo de A .

- a) Determine os valores próprios de A e diga, justificando, se A é invertível.
 - b) Determine, caso exista, uma base para \mathbb{R}^3 formada só por vectores próprios de A .
 - c) Determine uma base ortogonal para \mathbb{R}^3 que inclua um vector de $(\mathcal{C}(A))^\perp$ (complemento ortogonal de $\mathcal{C}(A)$).
 - d) Calcule a distância entre $(1, 1, 0)$ e $\mathcal{L}(A)$.
 - e) Determine uma matriz B tal que $(\mathcal{N}(A))^\perp = \mathcal{N}(B)$ (o complemento ortogonal de $\mathcal{N}(A)$ é igual ao núcleo de B).
25. Considere o espaço linear \mathbb{R}^4 munido com o produto interno usual e os seguintes subespaços lineares de \mathbb{R}^4 :
- $$V = L(\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, -1)\}), \quad W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + 2z + 3w = 0\}.$$
- a) Determine $u \in V$ e $v \in V^\perp$ tais que $(2, -2, 1, -1) = u + v$ e calcule a distância entre $(1, 1, 1, 1)$ e V .
 - b) Encontre uma matriz A tal que $W^\perp = \mathcal{N}(A)$.
 - c) Verifique que $V \subset W$ e determine uma base para $W^\perp \cap V^\perp$.
 - d) Verifique se $V^\perp + W^\perp = \mathbb{R}^4$, justificando.
26. Considere o espaço linear \mathbb{R}^3 munido com o produto interno usual. Para cada α real, considere a matriz dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & \alpha \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- a) Prove que $(4, 1 + \alpha, -4)$ é um vector próprio de A e diga qual é o valor próprio associado.
 - b) Determine os valores próprios de A e as respectivas multiplicidades algébricas.
 - c) Determine uma base para cada espaço próprio de A e identifique os valores de α para os quais A é diagonalizável.
 - d) Determine, se existirem, os valores de α para os quais é possível encontrar uma base ortogonal de \mathbb{R}^3 constituída só por vectores próprios de A . Justifique.
 - e) Considerando a matriz A para $\alpha = -1$, calcule a distância entre $(1, 1, 1)$ e $\mathcal{N}(A + I)$.
27. $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y - 3z = 0\}$. Considere o produto interno usual.
- a) Determine as equações cartesianas da recta perpendicular ao plano W que passa pelo ponto $u = (1, 1, 1)$.
 - b) Determine a equação cartesiana do plano paralelo ao plano W que passa pelo ponto $u = (1, 1, 1)$.

28. Considere a recta $r = (1, 1, 1) + L(\{(1, -1, 1)\})$. Considere o produto interno usual.
- a) Determine as equações cartesianas da recta r .
 - b) Determine a equação cartesiana do plano perpendicular à recta r que passa pelo ponto $u = (1, 0, 0)$.
29. Seja P o plano que passa pelos pontos $(1, 1, 1)$, $(2, 0, 3)$ e $(0, 2, 2)$. Considere o produto interno usual.
- a) Determine a equação cartesiana de P .
 - b) Determine as equações paramétricas de P .
 - c) Determine a equação vectorial de P .