Instituto Superior Técnico - Álgebra Linear - 1^o Semestre 2011/2012

LEAN - LEMat - MEAmbi - MEBiol - MEQ

7^a Ficha de exercícios

1. Seja
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$
Calcule as dimensões dos espaços próprios de A sem os determinar.

2. Seja
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Diga, justificando, se é possível encontrar uma base ortogonal para $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A. Caso seja possível, determine essa base.

3. Seja
$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$
Diga, justificando, se é possível encontrar uma base ortogonal para $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A. Caso seja possível, determine essa base. Isto é, diga se é possível encontrar uma matriz ortogonal P^T que diagonalize ortogonalmente A e indique nessa caso, a correspondente matriz diagonal semelhante a A.

4. Seja
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$
Determine três raízes quadradas de A, isto é, determine três matrizes B tais que $A = B^2$. Diga qual é a única raíz quadrada definida positiva B.

5. Classifique e diagonalize a seguinte forma quadrática. $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
$$Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 3x_3^2.$$

6. Seja
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}.$$
(i) Mostre que A é normal.

(ii) Diga, justificando, se A é hermitiana.

(iii) Encontre uma matriz unitária U^H que diagonalize unitariamente A e indique a correspondente matriz diagonal semelhante a A.

7. Determine a solução de mínimos quadrados de $Au = b$, com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

calculando o correspondente vector erro de mínimos quadrados.

8. Considere o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} u_1' = -2u_3 \\ u_2' = u_1 + 2u_2 + u_3 \\ u_3' = u_1 + 3u_3 \end{cases}$$

(i) Resolva-o, determinando a respectiva solução geral.

(ii) Determine a única solução

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} \quad \text{tal que} \quad \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \\ u_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$