Instituto Superior Técnico - Álgebra Linear - 1^o Semestre 2011/2012

LEAN - LEMat - MEAmbi - MEBiol - MEQ

Resolução da 2^a Ficha de exercícios

1. **(i)** (312645) é par pois tem 4 inversões.
(ii) (234516) é par pois tem 4 inversões.
(iii) (654321) é ímpar pois tem 15 inversões.
(iv) (123456) é par pois tem 0 inversões.
(v) (546321) é ímpar pois tem 13 inversões.
(vi) (453261) é par pois tem 10 inversões.
(vii) (634125) é ímpar pois tem 9 inversões.
(viii) (123465) é ímpar pois tem 1 inversão.

2. **(i)** (234516) é par pois tem 4 inversões e (312645) é par pois tem 4 inversões. Logo, tem-se

$$+a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$$

uma vez que (234516) e (312645) têm a mesma paridade.

(ii) (123456) é par pois tem 0 inversões e (654321) é ímpar pois tem 15 inversões. Logo, tem-se

$$-a_{16}a_{25}a_{34}a_{43}a_{52}a_{61}$$

uma vez que (123456) e (654321) têm paridades diferentes.

(iii) (546321) é ímpar pois tem 13 inversões e (453261) é par pois tem 10 inversões. Logo, tem-se

$$-a_{54}a_{45}a_{63}a_{32}a_{26}a_{11}$$

uma vez que (546321) e (453261) têm paridades diferentes.

(iv) (123465) é ímpar pois tem 1 inversão e (634125) é ímpar pois tem 9 inversões. Logo, tem-se

$$+a_{16}a_{23}a_{34}a_{41}a_{62}a_{55}$$

uma vez que (123465) e (634125) têm a mesma paridade.

3. **(i)** (123) é par pois tem 0 inversões e (321) é ímpar pois tem 3 inversões. Atendendo à definição de determinante, tem-se

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\, a_{13}a_{22}a_{31}$$

uma vez que (123) e (321) têm paridades diferentes.

(ii) (1234) é par pois tem 0 inversões e (4321) é par pois tem 6 inversões. Atendendo à definição de determinante, tem-se

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$$

uma vez que (1234) e (4321) têm a mesma paridade.

(iii) Ao efectuar $n-1+n-2+...+2+1$ trocas de linhas: linha 1 com cada uma das $n-1$ linhas que lhe estão abaixo, nova linha 1 com cada uma das $n-2$ linhas que lhe estão abaixo (excluindo a nova linha n) e assim sucessivamente, tem-se

$$\det \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1\ 2} & \cdots & a_{n-1\ n} \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = (-1)^{n\frac{n-1}{2}} \det \begin{bmatrix} a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \\ 0 & a_{n-1\ 2} & \cdots & a_{n-1\ n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \end{bmatrix} =$$

$$= (-1)^{n\frac{n-1}{2}} a_{1n}...a_{n-1\ 2}a_{n1}$$

atendendo a que

$$n-1+n-2+...+2+1 = (n-1)\frac{n-1+1}{2} = n\frac{n-1}{2}.$$

4. Uma matriz é não singular se e só se é invertível e como tal, será singular se e só se fôr não invertível.

(i) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4-6 = -2 \neq 0$, logo a matriz é invertível.

(ii) $\begin{vmatrix} 18563 & 18573 \\ 21472 & 21482 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18563 & 10 \\ 21472 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18563 & 10 \\ 2909 & 0 \end{vmatrix} = -29090 \neq 0$, logo a matriz é invertível.

(iii) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix} = 1-2-(4-3) = -2 \neq 0$, logo a matriz é invertível.

(iv) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta - (-\operatorname{sen}^2\theta) = 1 \neq 0$, logo a matriz é invertível.

(v) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \\ -5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -12+5-(-15) = 8 \neq 0$, logo a matriz é invertível.

(vi) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2+18+10-4-15-(-6) = 13 \neq 0$, logo a matriz é invertível.

(vii) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{por (vi)}}{=} -13 \neq 0$, logo a matriz é invertível.

(viii) $\begin{vmatrix} 8 & 12 & 8 \\ 5 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{por (vi)}}{=} 52 \neq 0$, logo a matriz é invertível.

(ix) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, logo a matriz não é invertível.

(x) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, logo a matriz é invertível.

(xi) $\begin{vmatrix} -2 & -2 & 8 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 30 \neq 0$, logo a matriz é invertível.

(xii)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\left[-6 + 1 + (-2) - (-1) - (-2) - 6\right] + 2\left[1 + 12 - 2 - 2\right] = 20 + 18 = 38 \neq 0,$$

logo a matriz é invertível.

(xiii) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -23 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 8 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 8 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \underset{\text{por (xi)}}{=} 30 \neq 0$, logo a matriz é invertível.

(xiv) $\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \\ 7 & 9 & 11 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$

$= 0$, logo a matriz não é invertível.

(xv) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 5(-1)^{5+1} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 5 \left[4(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \right] = 120 \neq 0$, logo a matriz é invertível.

(xvi) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & a \end{vmatrix} = a^5 + b^5 \neq 0$ se e só se $a \neq -b$, logo a matriz é invertível se e só se $a \neq -b$.

(xvii) $\begin{vmatrix} 7 & -4 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & 8 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -3\,(-1)^6 \begin{vmatrix} 7 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 7 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -6 & 8 \\ 0 & -18 & 19 \end{vmatrix} =$

$= -3\,(6\,(-19 + 3 \times 8)) = -3\,(6\,(-19 + 3 \times 8)) = -3{\times}30 = -90 \neq 0$, logo a matriz é invertível.

(xviii) $\begin{vmatrix} 9 & 0 & -6 & 4 & -2 \\ 5 & -3 & 0 & -1 & 2 \\ 8 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ -6 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 7 & 0 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3\,(-1)^4 \begin{vmatrix} 9 & -6 & 4 & -2 \\ 8 & 4 & 1 & 1 \\ -6 & 3 & -1 & 3 \\ 7 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -2 & -6 & 4 & 9 \\ 1 & 4 & 1 & 8 \\ 3 & 3 & -1 & -6 \\ 3 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix} =$

$-3 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 8 \\ -2 & -6 & 4 & 9 \\ 3 & 3 & -1 & -6 \\ 3 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 6 & 25 \\ 0 & -9 & -4 & -30 \\ 0 & -7 & -1 & -17 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 2 & 6 & 25 \\ -7 & 2 & -5 \\ -7 & -1 & -17 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 2 & 6 & 25 \\ -7 & 2 & -5 \\ 0 & -3 & -12 \end{vmatrix} =$

$-3 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -7 & 2 & -5 \\ 0 & -3 & -12 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -7 & 2 & -13 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -3\,(21 - 78) = 171 \neq 0$, logo a matriz é invertível.

(xix) $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & \pi & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 9 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = -2\,(-1)^6 \begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & \sqrt{3} \end{vmatrix} =$

$= -2\,(-1)^6\,(-3)^6 \begin{vmatrix} 7 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = -6\,(-1)^5 \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, logo a matriz é invertível.

(xx) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -7 & 3 & 0 & -2 \\ \pi & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -7 & 3 & -2 \\ 3 & 9 & 0 \end{vmatrix} = -2\,(-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 30 \neq 0$, logo a matriz é invertível.

(xxi) $\begin{vmatrix} n & n-1 & \vdots & 2 & 1 \\ n-1 & n-1 & \vdots & 2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & n-2 & n-2 \\ 0 & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} = \cdots = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, logo a matriz é invertível.

5. **(i)** Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{bmatrix}$, com $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}$. Se $a = 0$ ou $h = 0$ então $\det A = 0$, isto é, A não é invertível. Se $a \neq 0$ e $h \neq 0$ então

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

isto é, A não é invertível. Logo, A não é invertível para quaisquer $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}$.
Em alternativa, pelo teorema de Laplace

$$\det A = (-1)^5 f \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & b & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 & d \\ 0 & 0 & h & 0 \end{vmatrix} + (-1)^7 c \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ e & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & g & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

(ii) Diga, para que valores de $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j \in \mathbb{R}$, é invertível a seguinte matriz

$$\det \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & j & 0 \end{bmatrix} = a\,(-1)^3 \det \begin{bmatrix} f & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & j & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= -ac\,(-1)^5 \det \begin{bmatrix} f & b & 0 & 0 \\ 0 & h & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & j & 0 \end{bmatrix} = ace\,(-1)^7 \det \begin{bmatrix} f & b & 0 \\ 0 & h & d \\ 0 & 0 & j \end{bmatrix} = -acefhj,$$

pelo que a matriz será invertível se e só se $a, c, e, f, h, j \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

6. Determinemos todos os valores do escalar λ para os quais a matriz $A - \lambda I$ não é invertível, isto é, todos os valores próprios de A.

(i) $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(1+\lambda) - 6 = \lambda^2 + \lambda - 6$.
Logo, $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 2 \text{ ou } \lambda = -3)$.

(ii) $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda\left(1 - \lambda^2\right) + 4(1+\lambda) - 4(1-\lambda) =$
$= \lambda\left[\left(1-\lambda^2\right) + 8\right]$. Logo, $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ou } \lambda = -3 \text{ ou } \lambda = 3)$.

(iii) $\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ \lambda & -\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & -\lambda \end{bmatrix} =$

$= \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ \lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = (-1)^3(\lambda - 3)\lambda^2$. Logo, $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 3)$.

(iv)

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}_{n\times n} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} n-\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\lambda & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = (-1)^n(\lambda - n)\lambda^{n-1}.$$

Logo, $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ou } \lambda = n)$.

7. $\begin{bmatrix} 0 & \pi \\ -1 & \pi \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} & \pi^2 \\ \frac{1}{4}-\frac{1}{\pi} & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \pi & 1 \\ -\pi & 0 \end{bmatrix}$.

8. a) $A_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & \alpha & 0 & -1 \\ \alpha & -1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & \alpha & 0 & -\alpha \end{bmatrix} \underset{\substack{\alpha L_1+L_2\to L_2 \\ -L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & \alpha & 0 & -1 \\ 0 & \alpha^2-1 & -\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\alpha \end{bmatrix}$.

Logo $\operatorname{car} A_\alpha = \begin{cases} 2 & \text{se } \alpha = 1 \\ 3 & \text{se } \alpha = -1 \\ 4 & \text{se } \alpha \neq 1 \text{ e } \alpha \neq -1. \end{cases}$

A_α é 4×4. Logo A_α é invertível se e só se $\operatorname{car} A_\alpha = 4$. Assim, A_α é invertível se e só se $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$.

b) $\det\left((A_0)^n + (A_0)^{n+2}\right) = \det\left[(A_0)^n\left(I+(A_0)^2\right)\right] =$

$$= \underbrace{(\det A_0)^n}_{=1} \det\left(I+(A_0)^2\right) = \det \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 20.$$

c) $\left((A_\alpha)^{-1}\right)_{(3,1)} = \dfrac{1}{\det A_\alpha}(\operatorname{cof} A_\alpha)_{(1,3)} = \dfrac{1}{(1-\alpha)^2(1+\alpha)}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & \alpha & -\alpha \end{vmatrix} =$

$$= \frac{1-\alpha^2}{(1-\alpha)^2(1+\alpha)} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

9. (i) $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}(\operatorname{cof} A)^T = \dfrac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

(ii) $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}(\operatorname{cof} A)^T = \dfrac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(iii) $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}(\operatorname{cof} A)^T = \dfrac{1}{6}\begin{bmatrix} 18 & 0 & 6 \\ 24 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/6 \\ 1 & 1 & 1/6 \end{bmatrix}$

10.

$$I-\begin{bmatrix}0&1\\2&2\end{bmatrix}A=A\det\begin{bmatrix}0&1\\2&2\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}-2&1\\2&0\end{bmatrix}A=I\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A=\begin{bmatrix}-2&1\\2&0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}\\1&1\end{bmatrix}.$$

11.

$$\det\left(A^6-A^5\right)=(\det A)^5\det(A-I)=$$
$$=\left(\det\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\right)^5\det\begin{bmatrix}-1&0&0&1\\0&-1&0&-2\\0&0&-1&0\\0&0&0&3\end{bmatrix}=3.$$

12.

$$AXB-B=AX\det\left(A^TA\right)\Leftrightarrow AX\left(B-I\underbrace{\det\left(A^TA\right)}_{=1}\right)=B\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow X=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&-1\end{bmatrix}.$$

13. (i) Tem-se

$$\det A=\begin{vmatrix}-3&2&0&2\\-1&0&0&3\\0&9&-2&0\\3&-1&0&2\end{vmatrix}=(-2)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}-3&2&2\\-1&0&3\\3&-1&2\end{vmatrix}=$$
$$=(-2)(2+18-(-4)-9)=-30\neq 0$$

pelo que A é invertível. Logo,

$$\left(A^{-1}\right)_{(2,2)}=\frac{1}{\det A}\left((\operatorname{cof}A)^T\right)_{(2,2)}=\frac{1}{\det A}(\operatorname{cof}A)_{(2,2)}=\frac{1}{-30}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}-3&0&2\\0&-2&0\\3&0&2\end{vmatrix}=-\frac{4}{5}.$$

$$\det B=\begin{vmatrix}-1&0&0&2\\4&0&1&0\\0&1&0&-3\\0&-1&2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&0&0&2\\0&0&1&8\\0&1&0&-3\\0&0&2&-1\end{vmatrix}=(-1)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0&1&8\\1&0&-3\\0&2&-1\end{vmatrix}=-17\neq 0$$

pelo que B é invertível. Logo,

$$\left(B^{-1}\right)_{(2,3)}=\frac{1}{\det B}\left((\operatorname{cof}B)^T\right)_{(2,3)}=\frac{1}{\det B}(\operatorname{cof}B)_{(3,2)}=\frac{1}{-17}(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}-1&0&2\\4&1&0\\0&2&2\end{vmatrix}=\frac{14}{17}.$$

(ii) $\det(A+B) = \det\begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 10 & -2 & -3 \\ 3 & -2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = -134 \neq -47 = -30 - 17 = \det A + \det B$

$\det(A-B) = \det\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 8 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} = 138 \neq -13 = -30 + 17 = \det A - \det B$

14. **(i)** $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}} = \dfrac{-2}{-1} = 2$ e $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}} = \dfrac{1}{-1} = -1$

(ii)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-5}{-5} = 1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}} = 0 \text{ e } z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{5}{-5} = -1$$

15. $\det C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$, logo C é invertível. $\det D = \begin{vmatrix} 9 & -8 & -1 \\ -7 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, logo D é invertível.

(i) $\det(2C^{-1}) = 2^3 \dfrac{1}{\det C} = -\dfrac{4}{3}$

(ii) $\det\left(C^3 (2C)^{-1}\right) = (\det C)^3 \dfrac{1}{2^3}\dfrac{1}{\det C} = (\det C)^2 \dfrac{1}{8} = \dfrac{9}{2}$

(iii) $\det\left(\left(C^T 2C\right)^{-1}\right) = \det\left(C^{-1}\dfrac{1}{2}\left(C^{-1}\right)^T\right) = \dfrac{1}{2^3}\det(C^{-1})\det(C^{-1}) = \dfrac{1}{2^3}\left(\dfrac{1}{\det C}\right)^2 = \dfrac{1}{288}$

(iv) $\det\left(C^T \tfrac{1}{2} C^{-2}\right) = \dfrac{1}{2^3}\det\left(C^T\right)\det(C^{-2}) = \dfrac{1}{2^3}\det C \dfrac{1}{(\det C)^2} = \dfrac{1}{2^3}\dfrac{1}{\det C} = -\dfrac{1}{48}$

(v) $\det\left(C^2+2D\right)=\det\left(\begin{bmatrix}1&1&-1\\8&11&4\\2&1&6\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}9&-8&-1\\-7&-3&0\\-2&0&0\end{bmatrix}\right)=$

$=\det\begin{bmatrix}19&-15&-3\\-6&5&4\\-2&1&6\end{bmatrix}=62$

(vi) $\det\left(-2C^T\left(-\frac{2}{3}D^3\right)^{-1}\left(\left(D^T\right)^{-1}C\right)^{-1}\right)=(-2)^3\det\left(C^T\right)\dfrac{1}{\det\left(-\frac{2}{3}D^3\right)}\dfrac{1}{\det\left((D^T)^{-1}C\right)}=$

$=-8\left(\det C\right)\left(-\dfrac{3}{2}\right)^3\dfrac{1}{\left(\det D\right)^3}\dfrac{\det D}{\det C}=8\dfrac{1}{\left(\det D\right)^2}\dfrac{27}{8}=\dfrac{27}{36}=\dfrac{3}{4}.$

16. $\det(2A^TB^{-3})=2^3\det\left(A^T\right)\det(B^{-3})=8\det A\dfrac{1}{\left(\det B\right)^3}=64\sqrt{3}.$

17. **(i)** $\begin{vmatrix}1&1&a\\2&b&1\\c&2&2\end{vmatrix}=-2$ **(ii)** $\begin{vmatrix}a+3&-1&-2\\b+3&b-2&-2\\c+3&2-c&-c\end{vmatrix}=-2$ **(iii)** $\det\left(\frac{1}{2}B^TB\right)=\frac{1}{2}$

18. $\begin{vmatrix}a&b&0&c\\d&e&0&f\\g&h&0&i\\x&y&-1&z\end{vmatrix}=5\Leftrightarrow\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}=5$

(i) $\begin{vmatrix}d&e&f\\g&h&i\\a&b&c\end{vmatrix}=5$ **(ii)** $\begin{vmatrix}-a&-b&-c\\2d&2e&2f\\-g&-h&-i\end{vmatrix}=10$ **(iii)** $\begin{vmatrix}a+d&b+e&c+f\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}=5$

(iv) $\begin{vmatrix}2i&2h&2g\\f-3c&e-3b&d-3a\\c&b&a\end{vmatrix}=10$ **(v)** $\begin{vmatrix}a&g&d\\b&h&e\\c&i&f\end{vmatrix}=-5$

19. **(i)** $\begin{vmatrix}a&b&c\\6&3&0\\-\frac{1}{2}&-1&-\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\dfrac{3}{2}$ **(ii)** $\begin{vmatrix}a&b&c\\2a+2&2b+1&2c\\a+1&b+2&c+1\end{vmatrix}=1$

(iii) $\begin{vmatrix}a-1&b-2&c-1\\3&3&1\\1&2&1\end{vmatrix}=1$

(iv) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3a+1 & 3b+2 & 3c+1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3a+1 & 3b+2 & 3c+1 \end{vmatrix} =$

$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3a+1 & 3b+2 & 3c+1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$

20. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ \beta & \beta\alpha+\beta^2 & 2\beta \\ \beta\alpha & \alpha & \alpha \end{vmatrix} = -\alpha\beta.$

21. $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda+1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & 3 & 3 & 3 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+3 & 4 & 4 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+3 & \lambda+4 & 5 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+3 & \lambda+4 & \lambda+5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^6.$

22. $\begin{vmatrix} \lambda & \lambda & \lambda & \dots & & \lambda \\ 1 & \lambda+1 & 1 & \dots & & 1 \\ \vdots & 1 & \lambda+1 & \ddots & & \\ & \vdots & 1 & \ddots & 1 & \vdots \\ & & \vdots & \ddots & \lambda+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & & 0 \\ \vdots & 0 & \lambda & \ddots & & \\ & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ & & \vdots & \ddots & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^n.$

23. Sejam $\beta \neq 0$ e $A = (a_{ij})_{n\times n}$.

$$\det\left(\beta^{i-j}a_{ij}\right) = \begin{vmatrix} a_{11} & \frac{1}{\beta}a_{12} & \frac{1}{\beta^2}a_{13} & \dots & \frac{1}{\beta^{n-2}}a_{1\ n-1} & \frac{1}{\beta^{n-1}}a_{1n} \\ \beta a_{21} & a_{22} & \frac{1}{\beta}a_{23} & \dots & \frac{1}{\beta^{n-3}}a_{2\ n-1} & \frac{1}{\beta^{n-2}}a_{2n} \\ \vdots & \beta a_{32} & a_{33} & \ddots & & \\ & \vdots & \beta a_{43} & \ddots & \frac{1}{\beta}a_{n-2\ n-1} & \vdots \\ & & \vdots & \ddots & a_{n-1\ n-1} & \frac{1}{\beta}a_{n-1\ n} \\ \beta^{n-1}a_{n1} & \beta^{n-2}a_{n2} & \beta^{n-3}a_{n3} & \dots & \beta a_{n\ n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\beta}\cdots\frac{1}{\beta^{n-2}}\frac{1}{\beta^{n-1}}\begin{vmatrix} \beta^{n-1}a_{11} & \beta^{n-2}a_{12} & \beta^{n-3}a_{13} & \dots & \beta a_{1\ n-1} & a_{1n} \\ \beta^{n-1}a_{21} & \beta^{n-2}a_{22} & \beta^{n-3}a_{23} & \dots & \beta a_{2\ n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \beta^{n-2}a_{32} & \beta^{n-3}a_{33} & \ddots & & \\ & \vdots & \beta^{n-3}a_{43} & \ddots & \beta a_{n-2\ n-1} & \vdots \\ & & \vdots & \ddots & \beta a_{n-1\ n-1} & a_{n-1\ n} \\ \beta^{n-1}a_{n1} & \beta^{n-2}a_{n2} & \beta^{n-3}a_{n3} & \dots & \beta a_{n\ n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\beta}\cdots\frac{1}{\beta^{n-2}}\frac{1}{\beta^{n-1}}\beta^{n-1}\beta^{n-2}\cdots\beta \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & a_{32} & a_{33} & \ddots & & \\ & \vdots & a_{43} & \ddots & a_{n-2\,n-1} & \vdots \\ & & \vdots & \ddots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \det A.$$

24. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix},$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$. A matriz A é invertível se e só se $\det A \neq 0$. Tem-se

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = 0$$

se $a = b$ ou $a = c$. Se $a \neq b$ e $a \neq c$ então

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & 0 & c^2-a^2-(c-a)(b+a) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & 0 & (c-a)\left[(c+a)-(b+a)\right] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & 0 & (c-a)(c-b) \end{vmatrix} = 0$$

se $b = c$.

Logo, a matriz A é invertível se e só se $a \neq b$, $a \neq c$ e $b \neq c$.

25. (i)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & y_1 \\ x_2 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & y_1-x_1 & y_1-x_1 \\ x_2 & 0 & y_2-x_2 \end{vmatrix} = (y_1-x_1)(-1)^{2+2}\det\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x_2 & y_2-x_2 \end{vmatrix} = (y_1-x_1)(y_2-x_2).$$

(ii)

$$\det\begin{bmatrix} (x_1)^3 & (x_1)^2 & x_1 & 1 \\ (x_2)^3 & (x_2)^2 & x_2 & 1 \\ (x_3)^3 & (x_3)^2 & x_3 & 1 \\ (x_4)^3 & (x_4)^2 & x_4 & 1 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & x_1 & (x_1)^2 & (x_1)^3 \\ 1 & x_2 & (x_2)^2 & (x_2)^3 \\ 1 & x_3 & (x_3)^2 & (x_3)^3 \\ 1 & x_4 & (x_4)^2 & (x_4)^3 \end{bmatrix} =$$

$$= \det\begin{bmatrix} 1 & x_1 & (x_1)^2 & (x_1)^3-(x_1)^3 \\ 0 & x_2-x_1 & (x_2)^2-(x_1)^2 & (x_2)^3-(x_1)^3 \\ 0 & x_3-x_1 & (x_3)^2-(x_1)^2 & (x_3)^3-(x_1)^3 \\ 0 & x_4-x_1 & (x_4)^2-(x_1)^2 & (x_4)^3-(x_1)^3 \end{bmatrix} =$$

$$= (x_4 - x_1)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)\det\begin{bmatrix} 1 & x_1 & (x_1)^2 & (x_1)^3 - (x_1)^3 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 & x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 \\ 0 & 1 & x_3 + x_1 & x_1^2 + x_1x_3 + x_3^2 \\ 0 & 1 & x_4 + x_1 & x_1^2 + x_1x_4 + x_4^2 \end{bmatrix} =$$

$$= (x_4 - x_1)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)\det\begin{bmatrix} 1 & x_1 & (x_1)^2 & (x_1)^3 - (x_1)^3 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 & x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 \\ 0 & 0 & x_3 - x_2 & x_1(x_3 - x_2) + x_3^2 - x_2^2 \\ 0 & 0 & x_4 - x_2 & x_1(x_4 - x_2) + x_4^2 - x_2^2 \end{bmatrix} =$$

$$= (x_4 - x_1)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)\det\begin{bmatrix} 1 & x_1 & (x_1)^2 & (x_1)^3 - (x_1)^3 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 & x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 + x_3 + x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 + x_4 + x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= (x_4 - x_1)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)\det\begin{bmatrix} 1 & x_1 & (x_1)^2 & (x_1)^3 - (x_1)^3 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 & x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 + x_3 + x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 - x_3 \end{bmatrix} =$$

$$= (x_4 - x_1)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3) =$$
$$= (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4)$$

26. (i) $\begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

(ii) $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ 2a_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ 2a_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a_1 & -b_1 & c_1 \\ 2a_2 & -b_2 & c_2 \\ 2a_3 & -b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

(iii) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1+b_1+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2+b_2+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3+b_3+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

27. $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1+d_1 \\ a_2+b_2 & c_2+d_2 \end{vmatrix} = (a_1+b_1)(c_2+d_2) - (a_2+b_2)(c_1+d_1) =$

$$= a_1c_2 - a_2c_1 + a_1d_2 - b_2c_1 + b_1c_2 - a_2d_1 + b_1d_2 - b_2d_1 =$$
$$= \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

28. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ e $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0$

29. O coeficiente de x^3 na expressão $\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ é -1, uma vez que as permutações correspondentes ao produto $\underbrace{x \times 1 \times x \times x}_{=x^3}$ são $\underbrace{(1234)}_{\text{par}}$ (a das linhas) e $\underbrace{(2134)}_{\text{ímpar}}$ (a das colunas).

30. (i) $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -1 + x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

(ii) $\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & 4 & x & x \\ x & x & 4 & x \\ x & x & x & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & x & x & x \\ 0 & 4-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x\,(4-x)^3 = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } x = 4)$

(iii) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & x-1 & 1-x \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1-x & 1-x & 1-x \\ 0 & x-1 & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & x-1 & 1-x \\ 1 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1-x & 1-x & 1-x^2 \\ 0 & x-1 & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & x-1 & 1-x \\ 1 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3-2x-x^2 \\ 0 & x-1 & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & x-1 & 1-x \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3-2x-x^2 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-2x-x^2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -(x-1)^2\,(3-2x-x^2) = 0 \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ou } x = -3)$$

31. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 7 & 1 & 5 \\ 8 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 53 & 3 \\ 7 & 71 & 5 \\ 8 & 87 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 53 & 533 \\ 7 & 71 & 715 \\ 8 & 87 & 871 \end{vmatrix}$. Como $533, 715$ e 871 são múltiplos de 13 então a 3^a coluna é também múltipla de 13. Logo $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 7 & 1 & 5 \\ 8 & 7 & 1 \end{vmatrix}$ é múltiplo de 13.

32. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ -1 & 0 & 10 \\ 3 & -7 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8+(-3)\times 1 \\ -1 & 0 & 10+(-3)\times 0 \\ 3 & -7 & 4+(-3)\times(-7) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 10 \\ 3 & -7 & 25 \end{vmatrix}$. Como a 3^a coluna é múltipla de 5, logo $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 10 \\ 3 & -7 & 25 \end{vmatrix}$ é múltiplo de 5.

33. Seja $A = (a_{ij})_{n\times n}$ com n ímpar e tal que $a_{ij} + a_{ji} = 0$, para todos os $i, j = 1, ..., n$. Mostre que A não é invertível.

Dem. $(a_{ij} + a_{ji} = 0$, para todos os $i, j = 1, ..., n) \Leftrightarrow A^T = -A$. Logo

$$\det A = \det\left(A^T\right) = \det(-A) = (-1)^n \det A \underset{n \text{ é ímpar}}{=} -\det A \Leftrightarrow \det A = 0.$$

Pelo que A não é invertível.

34. Se A (real) fôr ortogonal então $\det A = 1$ ou $\det A = -1$.

Dem. Sendo A ortogonal, tem-se

$$A^T A = AA^T = I$$

pelo que

$$(\det A)^2 = \det A \det A = \det A^T \det A = \det\left(A^T A\right) = \det I = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\det A = 1 \quad \text{ou} \quad \det A = -1).$$

Sendo A unitária, tem-se

$$A^H A = AA^H = I$$

pelo que

$$|\det A|^2 = \overline{\det A} \det A = \det A^H \det A = \det\left(A^H A\right) = \det I = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |\det A| = 1.$$