Instituto Superior Técnico - Álgebra Linear - 1^o Semestre 2011/2012

LEAN - LEMat - MEAmbi - MEBiol - MEQ

Resolução da 3^a Ficha de exercícios

1. **(i)** Seja $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$. Por exemplo:

$$(1,1) \in U, \quad \text{mas} \quad (-1)(1,1) = (-1,-1) \notin U.$$

Logo, U não é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

(ii) Seja $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$. Por exemplo:

$$(1,0), (0,1) \in U, \quad \text{mas} \quad (1,0) + (0,1) = (1,1) \notin U.$$

Logo, U não é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

(iii) **S**eja $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$. Por exemplo:

$$(1,1) \in U, \quad \text{mas} \quad 2(1,1) = (2,2) \notin U.$$

Logo, U não é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

2. Atendendo às respectivas dimensões, os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^2$, com as operações usuais, são todos os subespaços de $\mathbb{R}^2$.

(i) $\{(0,0)\}$ é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

(ii) Seja $V_k = \{(x, kx) : x \in \mathbb{R}\}$ com $k \in \mathbb{R}$ (fixo). $V_k \neq \varnothing$ pois $(0,0) \in V_k$. Sejam $(x_1, kx_1), (x_2, kx_2) \in V_k$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Tem-se

$$(x_1, kx_1) + (x_2, kx_2) = (x_1 + x_2, k(x_1 + x_2)) \in V_k$$

e, com $(x, kx) \in V_k$,

$$\alpha(x, kx) = (\alpha x, k(\alpha x)) \in V_k.$$

Logo, para todo o $k \in \mathbb{R}$, V_k é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

Em alternativa, uma vez que

$$V_k = L(\{(1,k)\}),$$

para todo o $k \in \mathbb{R}$, conclui-se que V_k é subespaço de $\mathbb{R}^2$ (para todo o $k \in \mathbb{R}$).

(iii) Seja $U = \{(0, a) : a \in \mathbb{R}\}$. $U \neq \varnothing$ pois $(0,0) \in U$. Sejam $(0, a_1), (0, a_2) \in U$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Tem-se

$$(0, a_1) + (0, a_2) = (0, a_1 + a_2) \in U$$

e, com $(0, a) \in U$,

$$\alpha(0, a) = (0, \alpha a) \in U.$$

Logo, U é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

Em alternativa, uma vez que

$$U = L(\{(0,1)\}),$$

conclui-se que U é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

(iv) $\mathbb{R}^2$ é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

3. U_k é subespaço de $\mathbb{R}^3$ se e só se $k=0$.

4. **(i)** Seja $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=2\}$. Ora $(0,0,0)\notin U$. Logo, U não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Seja $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y-z=0\}$. Tem-se

$$U=\{(x,y,x+y) : x,y\in\mathbb{R}\}.$$

Uma vez que

$$(x,y,x+y)=(x,0,x)+(0,y,y)=x(1,0,1)+y(0,1,1),$$

para quaisquer $x,y\in\mathbb{R}$, tem-se:

$$U=L\left(\{(1,0,1),(0,1,1)\}\right).$$

Logo, U é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Alternativamente, note que $U=\mathcal{N}(A)$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$, com $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

(iii) Seja $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x>0\}$. Ora $(0,0,0)\notin U$. Logo, U não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(iv) Seja $U=\{(0,0,z) : z\in\mathbb{R}\}$. Uma vez que $(0,0,z)=z(0,0,1)$, para qualquer $z\in\mathbb{R}$, tem-se:

$$U=L\left(\{(0,0,1)\}\right).$$

Logo, U é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(v) Seja $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y=2x \text{ e } z=3x\}$. Tem-se $U=\{(x,2x,3x) : x\in\mathbb{R}\}$.

Uma vez que $(x,2x,3x)=x(1,2,3)$, para qualquer $x\in\mathbb{R}$, tem-se:

$$U=L\left(\{(1,2,3)\}\right).$$

Logo, U é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Alternativamente, note que $U=\mathcal{N}(A)$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$, com $A=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(vi) Seja $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y=1\}$. Ora $(0,0,0)\notin U$. Logo, U não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(vii) Seja $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+z=0 \text{ e } x-y-z=0\}$. Tem-se

$$U=\{(0,y,-y) : y\in\mathbb{R}\}.$$

Uma vez que

$$(0,y,-y)=y(0,1,-1),$$

para qualquer $y\in\mathbb{R}$, tem-se:

$$U=L\left(\{(0,1,-1)\}\right).$$

Logo, U é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Alternativamente, note que $U = \mathcal{N}(A)$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$, com $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

(viii) Seja $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y \;\text{ ou }\; y = z\}$. Tem-se:

$$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\right\} \cup \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = z\right\}$$

Por exemplo:

$$(1, 1, 2), (1, 2, 2) \in U, \quad \text{mas} \quad (1, 1, 2) + (1, 2, 2) = (2, 3, 4) \notin U.$$

Logo, U não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(ix) Seja $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0 \;\text{ e }\; 2y + z = 0\}$. Tem-se

$$U = \{(x, x, -2x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Uma vez que

$$(x, x, -2x) = x(1, 1, -2),$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$U = L(\{(1, 1, -2)\}).$$

Logo, U é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Alternativamente, note que $U = \mathcal{N}(A)$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$, com $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(x) Seja $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}$. Por exemplo:

$$(1, 0, 1), (0, 1, 0) \in U, \quad \text{mas} \quad (1, 0, 1) + (0, 1, 0) = (1, 1, 1) \notin U.$$

Logo, U não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

O conjunto de todos os polinómios reais de grau igual a n:

$$U = \{a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \in \mathcal{P}_n : a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R} \;\text{ e }\; a_n \neq 0\},$$

com as operações usuais, não é um espaço linear. Por exemplo: o polinómio nulo $p(t) = \mathbf{0} \notin U$.

5. Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço linear de todos os polinómios reais de variável real e de grau menor ou igual a 2, com as operações usuais.

(i) Seja $U = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_0 = 0\}$. Tem-se

$$U = \left\{a_1 t + a_2 t^2 : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\right\} = L\left(\left\{t, t^2\right\}\right).$$

Logo, U é subespaço de $\mathcal{P}_2$.

(ii) Seja $U = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 = 2a_0 \; e \; a_1 = 0\}$. Tem-se

$$U = \left\{a_0 + 2a_0 t^2 : a_0 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Uma vez que

$$a_0 + 2a_0t^2 = a_0(1 + 2t^2),$$

para qualquer $a_0 \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$U = L\left(\left\{1 + 2t^2\right\}\right).$$

Logo, U é subespaço de $\mathcal{P}_2$.

(iii) Seja $U = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_1 = 1\}$. Por exemplo: o polinómio nulo $p(t) = \mathbf{0} \notin U$. Logo, U não é subespaço de $\mathcal{P}_2$.

(iv) Seja $U = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 - a_1 = 2\}$. Por exemplo: o polinómio nulo $p(t) = \mathbf{0} \notin U$. Logo, U não é subespaço de $\mathcal{P}_2$.

(v) Seja $U = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 - a_1 + 2a_0 = 0\}$. Tem-se

$$U = \left\{a_0 + a_1t + (a_1 - 2a_0)\,t^2 : a_0, a_1 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Uma vez que

$$a_0 + a_1t + (a_1 - 2a_0)\,t^2 = a_0(1 - 2t^2) + a_1(t + t^2),$$

para quaisquer $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$U = L\left(\left\{1 - 2t^2, t + t^2\right\}\right).$$

Logo, U é subespaço de $\mathcal{P}_2$.

6. Seja $\mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R})$ o espaço linear de todas as matrizes do tipo 2×3 com entradas reais.

(i) Seja $U = \left\{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R}) : b = a + c\right\}$. Tem-se

$$U = \left\{\begin{bmatrix} a & a+c & c \\ d & 0 & 0 \end{bmatrix} : a, c, d \in \mathbb{R}\right\}.$$

Uma vez que

$$\begin{bmatrix} a & a+c & c \\ d & 0 & 0 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

para quaisquer $a, c, d \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$U = L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

Logo, U é subespaço de $\mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R})$.

(ii) Seja $U = \left\{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & 0 & f \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R}) : b < 0\right\}$. Por exemplo: a matriz nula

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \notin U.$$

Logo, U não é subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

(iii) Seja $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) : a = -2c \ \text{ e } \ f = 2e + d \right\}$. Tem-se

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} -2c & b & c \\ d & e & 2e+d \end{bmatrix} : b, c, d, e \in \mathbb{R} \right\}.$$

Uma vez que

$$\begin{bmatrix} -2c & b & c \\ d & e & 2e+d \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

para quaisquer $b, c, d, e \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$U = L\left(\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right\} \right).$$

Logo, U é subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$. .

7. (i) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Tem-se $\mathcal{C}(A) = L(\{(1,0)\})$ e $\mathcal{L}(A) = L(\{(1,-1)\})$.
Seja $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Atendendo a que

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow x - y = 0,$$

o núcleo de A é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A) &= \left\{ u \in \mathbb{R}^2 : Au = \mathbf{0} \right\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0 \right\} = \\ &= \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,1) : x \in \mathbb{R}\} = L(\{(1,1)\}). \end{aligned}$$

(ii) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Tem-se $\mathcal{C}(A) = L(\{(1,0)\})$ e $\mathcal{L}(A) = L(\{(1,2,3)\})$.
Seja $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Atendendo a que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow x + 2y + 3z = 0,$$

o núcleo de A é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A) &= \left\{ u \in \mathbb{R}^3 : Au = \mathbf{0} \right\} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0 \right\} = \\ &= \{(-2y - 3z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(-2,1,0) + z(-3,0,1) : y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= L(\{(-2,1,0), (-3,0,1)\}). \end{aligned}$$

(iii) Seja $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Tem-se $\mathcal{C}(A)=\{(0,0)\}$ e $\mathcal{L}(A)=\{(0,0,0)\}$.
O núcleo de A é dado por: $\mathcal{N}(A)=\mathbb{R}^3$.

(iv) Seja $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Tem-se

$$\mathcal{C}(A)=L\left(\{(2,0,0),(1,1,0)\}\right) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}(A)=L\left(\{(2,1,1),(0,0,1)\}\right).$$

Seja $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Atendendo a que

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z=0 \\ \\ z=0 \end{cases}$$

o núcleo de A é dado por:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(A) &= \left\{u\in\mathbb{R}^3 : Au=\mathbf{0}\right\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 2x+y+z=0 \ \text{ e } \ z=0\right\}= \\ &= \{(x,-2x,0): x\in\mathbb{R}\}=\{x(1,-2,0): x\in\mathbb{R}\}=L\left(\{(1,-2,0)\}\right).\end{aligned}$$

(v) Seja $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Tem-se

$$\mathcal{C}(A)=L\left(\{(1,2,2),(0,3,1)\}\right) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}(A)=L\left(\{(1,0),(2,3)\}\right),$$

pois

$$(2,1)=\frac{4}{3}(1,0)+\frac{1}{3}(2,3).$$

Seja $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Atendendo a que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \\ 2x+3y=0 \\ \\ 2x+y=0 \end{cases}$$

o núcleo de A é dado por:

$$\mathcal{N}(A)=\left\{u\in\mathbb{R}^2 : Au=\mathbf{0}\right\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=0 \ \text{ e } \ 2x+3y=0 \ \text{ e } \ 2x+y=0\right\}=\{(0,0)\}.$$

(vi) Seja $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Tem-se

$$\mathcal{C}(A)=L\left(\{(1,2,2)\}\right) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}(A)=L\left(\{(1,2)\}\right).$$

Seja $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Atendendo a que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

o núcleo de A é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A) &= \left\{u \in \mathbb{R}^2 : Au = \mathbf{0}\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 0\right\} = \\ &= \{(-2y, y) : y \in \mathbb{R}\} = \{y(-2, 1) : y \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(-2, 1)\}\right). \end{aligned}$$

(vii) Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Tem-se

$$\mathcal{C}(A) = \{(0, 0, 0)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}(A) = \{(0, 0)\}.$$

O núcleo de A é dado por:

$$\mathcal{N}(A) = \mathbb{R}^2.$$

(viii) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Tem-se

$$\mathcal{C}(A) = L\left(\{(1, 2, 2), (0, 3, 1), (1, 0, 0)\}\right) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}(A) = L\left(\{(1, 0, 1), (2, 3, 0), (2, 1, 0)\}\right).$$

Seja $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Atendendo a que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ \\ y - 2z = 0 \\ \\ 4z = 0 \end{cases}$$

o núcleo de A é dado por:

$$\mathcal{N}(A) = \left\{u \in \mathbb{R}^3 : Au = \mathbf{0}\right\} = \{(0, 0, 0)\}.$$

Observação: Como $\mathcal{N}(A) = \{(0, 0, 0)\}$ e sendo A quadrada 3×3, tem-se $\mathcal{L}(A) = \mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^3$.

8. Seja

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \\ 0 & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}) : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Uma vez que

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \\ 0 & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, tem-se

$$U = L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

9. Considere, no espaço linear $\mathbb{R}^3$, os vectores $v_1 = (1,2,1)$, $v_2 = (1,0,2)$ e $v_3 = (1,1,0)$. Tem-se

(i) $(3,3,0) = 0(1,2,1) + 0(1,0,2) + 3(1,1,0)$

(ii) $(2,1,5) = 1(1,2,1) + 2(1,0,2) + (-1)(1,1,0)$

(iii) $(-1,2,0) = 2(1,2,1) + (-1)(1,0,2) + (-2)(1,1,0)$

(iv) $(1,1,1) = \frac{1}{3}(1,2,1) + \frac{1}{3}(1,0,2) + \frac{1}{3}(1,1,0)$.

10. Considere, no espaço linear $\mathbb{R}^4$, os vectores $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (1,-1,0,0)$ e $v_3 = (0,1,2,1)$. Tem-se

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \underset{-L_1+L_4\to L_4}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c|c|c|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{-L_2+L_4\to L_4}{\longrightarrow}$$

$$\underset{-L_2+L_4\to L_4}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c|c|c|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]. \quad (*)$$

Logo, $(2,0,2,2), (1,1,-2,2) \in L(\{v_1, v_2, v_3\})$, com

$$\begin{array}{rcl} (2,0,2,2) & = & (1,0,0,1) + (1,-1,0,0) + (0,1,2,1) \\ (1,1,-2,2) & = & 3(1,0,0,1) + (-2)(1,-1,0,0) + (-1)(0,1,2,1). \end{array}$$

Atendendo a (*), $(-1,4,2,2), (0,1,1,0) \notin L(\{v_1, v_2, v_3\})$.

11. Tem-se

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -2 & -5 & k \end{array}\right] \underset{\frac{2}{3}L_1+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -11/3 & k+2/3 \end{array}\right] \underset{-\frac{11}{3}L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & k+8 \end{array}\right].$$

Logo, -8 é o único valor de k para o qual o vector $u = (1, -2, k) \in \mathbb{R}^3$ é combinação linear dos vectores

$$v = (3, 0, -2) \quad \text{e} \quad w = (2, -1, -5).$$

12. Considere, no espaço linear $\mathcal{P}_2$, os vectores $p_1(t) = 2 + t + 2t^2$, $p_2(t) = -2t + t^2$, $p_3(t) = 2 - 5t + 5t^2$ e $p_4(t) = -2 - 3t - t^2$. O vector

$$q(t) = 2 + t + t^2$$

pertence à expansão linear $L(\{p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t)\})$? Podem os vectores $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ e $p_4(t)$ gerar $\mathcal{P}_2$? Tem-se

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & -5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & -1 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{-\frac{1}{2}L_1+L_2 \to L_2 \\ -L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -6 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right] \underset{\frac{1}{2}L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]. \quad (**)$$

Atendendo a (**), $q(t) = 2 + t + t^2 \notin L(\{p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t)\})$. Logo,

$$\{p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t)\} \text{ não pode gerar } \mathcal{P}_2.$$

13. **(i)** Seja $U = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Seja $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Tem-se

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1).$$

Logo, U gera $\mathbb{R}^3$.

(ii) Seja $U = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$. Seja $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Tem-se

$$(x, y, z) = x(1, 1, 1) + (y - x)(0, 1, 1) + (z - y)(0, 0, 1).$$

Logo, U gera $\mathbb{R}^3$.

(iii) Seja $U = \{(1, 1, 1), (-1, 1, -1), (1, -1, -1), (-1, -1, 1)\}$. Seja $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Determinemos os valores dos escalares $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ para os quais se tem

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ora a última igualdade é equivalente a

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & 1 & -1 & | & x \\ 1 & 1 & -1 & -1 & | & y \\ 1 & -1 & -1 & 1 & | & z \end{array}\right] \underset{\substack{-L_1+L_2\to L_2 \\ -L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & 1 & -1 & | & x \\ 0 & 2 & -2 & 0 & | & y-x \\ 0 & 0 & -2 & 2 & | & z-x \end{array}\right].$$

Logo

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + s \\ \\ \lambda_2 = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + s \\ \\ \lambda_3 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z + s \\ \\ \lambda_4 = s, \ \ s \in \mathbb{R} \end{cases}$$

e assim

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + s\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + s\right) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z + s\right) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

com $s \in \mathbb{R}$. Logo, U gera $\mathbb{R}^3$.

14.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_2 - \lambda_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -2 \\ \lambda_3 = -1. \end{cases}$$

Logo

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Seja $U = L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}\right)$.
Existe $D \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $D \notin U$ uma vez que

$$U \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \underbrace{\dim \mathcal{U}}_{\leq 3} \ < \ \underbrace{\dim \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})}_{=4}.$$

Seja $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in U$. Tem-se $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in U$ se e só se existirem escalares $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \alpha A + \beta B + \gamma C.$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \alpha A + \beta B + \gamma C \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_2 - \lambda_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = a \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = b \\ \lambda_1 + \lambda_2 = c \\ \lambda_2 - \lambda_3 = d \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 2 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & -1 & d \end{array}\right] \underset{\substack{-L_1+L_2\to L_2 \\ -L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 2 & b-a \\ 0 & 1 & 0 & c-a \\ 0 & 1 & -1 & d \end{array}\right] \underset{\substack{-L_3+L_4\to L_4 \\ \frac{1}{2}L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{-L_3+L_4\to L_4 \\ \frac{1}{2}L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 2 & b-a \\ 0 & 1 & 0 & c-a \\ 0 & 0 & 0 & d+\frac{1}{2}(b+a)-c \end{array}\right] \underset{L_2\leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & c-a \\ 0 & 0 & 2 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & d+\frac{1}{2}(b+a)-c. \end{array}\right]$$

Logo, para que o sistema linear anterior seja possível é necessário que se tenha

$$d+\frac{1}{2}(b+a)-c=0.$$

Deste modo podemos escrever

$$U=\left\{\left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right]\in\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}): d+\frac{1}{2}(b+a)-c=0\right\}$$

e assim, sendo $V=\left\{\left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right]\in\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}): d+\frac{1}{2}(b+a)-c\neq 0\right\}$, tem-se

$$\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})=U\oplus V.$$

Ou seja, qualquer vector de V que não seja o vector nulo, esse vector não pertence a U. Por exemplo

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right]\notin U=L\left(\left\{\left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right],\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right],\left[\begin{array}{cc} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{array}\right]\right\}\right).$$

15. Sejam

$$u=(2,1,0),\quad v=(1,-1,2)\quad \text{e}\quad w=(0,3,-4).$$

O vector (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$ pertencerá a $L(\{u,v,w\})$ se existirem $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tais que

$$(a,b,c)=\alpha(2,1,0)+\beta(1,-1,2)+\gamma(0,3,-4),$$

isto é, se o seguinte sistema (nas variáveis α, β e γ) fôr possível e determinado:

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta=a \\ \alpha-\beta+3\gamma=b \\ 2\beta-4\gamma=c. \end{cases}$$

Considerando então a matriz aumentada deste sistema, tem-se:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & a \\ 1 & -1 & 3 & b \\ 0 & 2 & -4 & c \end{array}\right] \underset{-\frac{1}{2}L_1+L_2\to L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & a \\ 0 & -3/2 & 3 & b-a/2 \\ 0 & 2 & -4 & c \end{array}\right] \underset{\frac{4}{3}L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\frac{4}{3}L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & a \\ 0 & -3/2 & 3 & b-\frac{a}{2} \\ 0 & 0 & 0 & c+\frac{4}{3}b-\frac{2}{3}a \end{array}\right].$$

Assim, o vector (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$ pertencerá a $L(\{u,v,w\})$ se:

$$c+\frac{4}{3}b-\frac{2}{3}a=0.$$

Observação: Deste modo, tem-se $L(\{u,v,w\})\neq\mathbb{R}^3$. De facto, uma vez que

$$v=\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}w$$

tem-se $L(\{u,v,w\})=L(\{u,w\})$ e como tal $\{u,v,w\}$ não pode gerar $\mathbb{R}^3$.

16. Sejam

$$A=\begin{bmatrix}1&1&5\\2&3&13\end{bmatrix}\quad\text{e}\quad B=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\4&-3&-1\\3&-1&3\end{bmatrix}.$$

Tem-se

$$A=\begin{bmatrix}1&1&5\\2&3&13\end{bmatrix}\underset{-2L_1+L_2\to L_2}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&1&5\\0&1&3\end{bmatrix}=A'$$

e

$$B=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\4&-3&-1\\3&-1&3\end{bmatrix}\underset{\substack{-4L_1+L_2\to L_2\\-3L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&1&3\\0&2&6\end{bmatrix}\underset{-2L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&1&3\\0&0&0\end{bmatrix}=B'.$$

Atendendo ao método de eliminação de Gauss:

$$\mathcal{L}(A)=\mathcal{L}(A')\ \text{ e }\ \mathcal{L}(B)=\mathcal{L}(B').$$

Além disso, uma vez que

$$(1,-1,-1)=(1,1,5)-2(0,1,3),$$

tem-se

$$\mathcal{L}(A)=\mathcal{L}(A')=\mathcal{L}(B')=\mathcal{L}(B).$$

Finalmente, como se tem sempre

$$\mathcal{C}(A^T)=\mathcal{L}(A)\ \text{ e }\ \mathcal{L}(B)=\mathcal{C}(B^T),$$

conclui-se que $\mathcal{C}(A^T)=\mathcal{C}(B^T)$.

17. (i) Seja $U=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4: x=0\ \text{ e }\ y=-z\}$. Tem-se

$$U=\{(0,-z,z,w): z,w\in\mathbb{R}\}.$$

Atendendo a que

$$(0,-z,z,w)=z(0,-1,1,0)+w(0,0,0,1),$$

tem-se

$$U=L(\{(0,-1,1,0),(0,0,0,1)\}).$$

(ii) Seja $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+w=0\}$. Tem-se

$$U = \{(-y-z-w,y,z,w) : y,z,w \in \mathbb{R}\}.$$

Atendendo a que

$$(-y-z-w,y,z,w) = y(-1,1,0,0) + z(-1,0,1,0) + w(-1,0,0,1),$$

tem-se

$$U = L\left(\{(-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)\}\right).$$

(iii) Seja $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+2y-z=0 \text{ e } x+y+2w=0 \text{ e } y-z+w=0\}$. Observe-se que

$$U = \mathcal{N}(A), \text{ com } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{-L_1+L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = A'.$$

Logo, $U = \mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A')$. Assim,

$$U = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+2y-z=0 \text{ e } -y+z+2w=0 \text{ e } 3w=0\right\} =$$

$$= \{(-z,z,z,0) : z \in \mathbb{R}\} = \{z(-1,1,1,0) : z \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(-1,1,1,0)\}\right).$$

18. (i) Seja $U = L\left(\{1-t^2, 1+t\}\right)$ um subespaço de $\mathcal{P}_2$. Seja $p(t) \in U$, com $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$. Então, existirão $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 = \alpha\left(1-t^2\right) + \beta(1+t).$$

Tem-se então a matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a_0 \\ 0 & 1 & a_1 \\ -1 & 0 & a_2 \end{array}\right] \underset{L_1+L_3 \longrightarrow L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a_0 \\ 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 1 & a_0+a_2 \end{array}\right] \underset{-L_2+L_3 \longrightarrow L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a_0 \\ 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & a_0+a_2-a_1 \end{array}\right].$$

Logo, para que o sistema linear anterior seja possível é preciso que $a_0 + a_2 - a_1 = 0$. Assim,

$$U = \left\{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_0 + a_2 - a_1 = 0\right\}.$$

(ii) Seja $U = L\left(\{(1,0,1),(0,1,0),(-2,1,-2)\}\right)$. Seja $(x,y,z) \in U$. Então, existirão $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$(x,y,z) = \alpha(1,0,1) + \beta(0,1,0) + \gamma(-2,1,-2).$$

Tem-se então a matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 1 & 0 & -2 & z \end{array}\right] \underset{-L_1+L_3 \longrightarrow L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 & z-x \end{array}\right].$$

Assim,

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z - x = 0\right\}.$$

Observação extra: $U = L\left(\{(1,0,1),(0,1,0),(-2,1,-2)\}\right) = L\left(\{(1,0,1),(0,1,0)\}\right)$, uma vez que

$$(-2,1,-2) = (-2)(1,0,1) + (0,1,0).$$

(iii) Seja $V = L\left(\{(0,1,0),(-2,1,-2)\}\right)$. Seja $(x,y,z) \in V$. Então, existirão $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$(x,y,z) = \alpha(0,1,0) + \beta(-2,1,-2).$$

Tem-se então a matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & -2 & x \\ 1 & 1 & y \\ 0 & -2 & z \end{array}\right] \underset{L_1 \longleftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & y \\ 0 & -2 & x \\ 0 & -2 & z \end{array}\right] \underset{-L_2+L_3 \longrightarrow L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & y \\ 0 & -2 & x \\ 0 & 0 & z-x \end{array}\right].$$

Assim,

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z - x = 0\right\}.$$

Observação extra: $V = L\left(\{(0,1,0),(-2,1,-2)\}\right) = L\left(\{(1,0,1),(0,1,0)\}\right)$, uma vez que

$$(-2,1,-2) = (-2)(1,0,1) + (0,1,0) \quad \text{e} \quad (1,0,1) = \left(-\frac{1}{2}\right)(-2,1,-2) + \frac{1}{2}(0,1,0).$$

(iv) Seja $W = L\left(\{(1,1,2),(2,1,1)\}\right)$. Seja $(x,y,z) \in V$. Então, existirão $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$(x,y,z) = \alpha(1,1,2) + \beta(2,1,1).$$

Tem-se então a matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 1 & 1 & y \\ 2 & 1 & z \end{array}\right] \underset{\substack{-L_1+L_2 \to L_2 \\ -2L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & y-x \\ 0 & -3 & z-2x \end{array}\right] \underset{-3L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & y-x \\ 0 & 0 & z-3y+x \end{array}\right].$$

Assim,

$$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 3y + z = 0\right\}.$$

Observação extra: $W = L\left(\{(3,1,0),(-1,0,1)\}\right) = L\left(\{(1,1,2),(2,1,1)\}\right)$, uma vez que

$$(3,1,0) = 2(2,1,1) + (-1)(1,1,2), \quad (-1,0,1) = (1,1,2) + (-1)(2,1,1)$$

e

$$(1,1,2)=(3,1,0)+2(-1,0,1), \quad (2,1,1)=(3,1,0)+(-1,0,1).$$

(v) Seja $U=L\left(\{(1,0,-1,1)\}\right)$. Seja $(x,y,z,w)\in U$. Então, existirá $\alpha\in\mathbb{R}$ tal que

$$(x,y,z,w)=\alpha(1,0,-1,1).$$

Tem-se então a matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{c|c} 1 & x \\ 0 & y \\ -1 & z \\ 1 & w \end{array}\right] \underset{\substack{L_1+L_3\longrightarrow L_3 \\ -L_1+L_4\longrightarrow L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{c|c} 1 & x \\ 0 & y \\ 0 & x+z \\ 0 & w-x \end{array}\right].$$

Assim,

$$U=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : y=0 \text{ e } x+z=0 \text{ e } w-x=0\right\}.$$

(vi) Seja $U=L\left(\{(1,-2,5,-3),(2,-4,6,2),(3,-6,11,-1),(0,0,1,-2)\}\right)$. Como

$$(3,-6,11,-1)=(1,-2,5,-3)+(2,-4,6,2) \quad \text{e} \quad (0,0,1,-2)=\frac{1}{2}(1,-2,5,-3)-\frac{1}{4}(2,-4,6,2)$$

então

$$U=L\left(\{(1,-2,5,-3),(2,-4,6,2)\}\right).$$

Seja $(x,y,z,w)\in U$. Então, existirão $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tais que

$$(x,y,z,w)=\alpha(1,-2,5,-3)+\beta(2,-4,6,2).$$

Tem-se então a matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ -2 & -4 & y \\ 5 & 6 & z \\ -3 & 2 & w \end{array}\right] \underset{\substack{2L_1+L_2\longrightarrow L_2 \\ -5L_1+L_3\longrightarrow L_3 \\ 3L_1+L_4\longrightarrow L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 0 & 2x+y \\ 0 & -4 & -5x+z \\ 0 & 8 & 3x+w \end{array}\right] \underset{2L_3+L_4\longrightarrow L_4}{\longrightarrow}$$

$$\underset{2L_3+L_4\longrightarrow L_4}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 0 & 2x+y \\ 0 & -4 & -5x+z \\ 0 & 0 & -7x+2z+w \end{array}\right] \underset{L_2\leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & -4 & -5x+z \\ 0 & 0 & 2x+y \\ 0 & 0 & -7x+2z+w \end{array}\right].$$

Assim,

$$U=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : 2x+y=0 \text{ e } -7x+2z+w=0\right\}.$$

19. Podemos colocar os vectores do conjunto $\{(\alpha_1,\beta_1,3),(\alpha_2,\beta_2,9)\}$ como colunas de uma matriz A e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss. Se $\alpha_1\neq 0$, tem-se

$$A=\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \underset{\substack{-\frac{\beta_1}{\alpha_1}L_1+L_2\rightarrow L_2 \\ -\frac{3}{\alpha_1}L_1+L_3\rightarrow L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & -\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}\alpha_2+\beta_2 \\ 0 & -\dfrac{3}{\alpha_1}\alpha_2+9 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz em escada A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto $\{(\alpha_1,\beta_1,3),(\alpha_2,\beta_2,9)\}$ é linearmente independente se $\alpha_1 \neq 0$ e $\left(\beta_2 \neq \dfrac{\beta_1}{\alpha_1}\alpha_2 \text{ ou } \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \neq 3\right)$. Se $\alpha_1 = 0$, tem-se

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \underset{-\frac{\beta_1}{3}L_1+L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 0 & -3\beta_1+\beta_2 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Logo, o conjunto $\{(\alpha_1,\beta_1,3),(\alpha_2,\beta_2,9)\}$ é linearmente independente se $\alpha_1 = 0$ e ($\beta_2 \neq 3\beta_1$ ou $\alpha_2 \neq 0$). Assim, o conjunto $\{(\alpha_1,\beta_1,3),(\alpha_2,\beta_2,9)\}$ é linearmente independente se e só se

$$\left(\alpha_1 \neq 0 \;\text{ e }\; \left(\beta_2 \neq \frac{\beta_1}{\alpha_1}\alpha_2 \;\text{ ou }\; \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \neq 3\right)\right) \;\text{ ou }\; \left(\alpha_1 = 0 \;\text{ e }\; (\beta_2 \neq 3\beta_1 \;\text{ ou }\; \alpha_2 \neq 0)\right).$$

20. **(i)** Podemos colocar os vectores do conjunto $\{(4,2,1),(2,6,-5),(1,-2,3)\}$ como colunas de uma matriz A e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & -5 & 3 \end{bmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 2 & 6 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{-2L_1+L_2 \to L_2 \\ -4L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 16 & -8 \\ 0 & 22 & -11 \end{bmatrix} \underset{\substack{\frac{1}{8}L_2 \to L_2 \\ \frac{1}{11}L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \underset{-L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz em escada A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto $\{(4,2,1),(2,6,-5),(1,-2,3)\}$ é linearmente dependente, mas o conjunto $\{(4,2,1),(2,6,-5)\}$ é linearmente independente. Procuremos então $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$(1,-2,3) = \alpha(4,2,1) + \beta(2,6,-5).$$

Atendendo ao que já se fez e considerando a 3^a coluna como o termo independente do sistema, tem-se

$$\begin{cases} 4\alpha + 2\beta = 1 \\ 2\alpha + 6\beta = -2 \\ \alpha - 5\beta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - 5\beta = 3 \\ 2\beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Pelo que

$$(1,-2,3) = \frac{1}{2}(4,2,1) - \frac{1}{2}(2,6,-5).$$

(ii) Podemos colocar os vectores do conjunto

$$\{(1,2,-1),(3,2,5)\}$$

como colunas de uma matriz e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \underset{\substack{-2L_1+L_2\to L_2 \\ L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \underset{2L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A'$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz em escada A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto $\{(1,2,-1),(3,2,5)\}$ é linearmente independente.

(iii) Podemos colocar os vectores do conjunto $\{(1,2,3),(1,1,1),(1,0,1)\}$ como colunas de uma matriz A e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{-2L_1+L_2\to L_2 \\ -3L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \underset{-2L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz em escada A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto $\{(1,2,3),(1,1,1),(1,0,1)\}$ é linearmente independente.

Observação extra: encontrámos três vectores de $\mathbb{R}^3$ linearmente independentes. Como a dimensão de $\mathbb{R}^3$ é 3, então o conjunto $\{(1,2,3),(1,1,1),(1,0,1)\}$ é desde logo uma base de $\mathbb{R}^3$, sem ser preciso verificar se gera $\mathbb{R}^3$.

(iv) O conjunto $\{(1,0,-1),(0,0,0),(0,1,1)\}$ contém o vector nulo, logo é linearmente dependente. Facilmente se vê que $\{(1,0,-1),(0,1,1)\}$ é linearmente independente. Facilmente também se vê que

$$(0,0,0) = 0(1,0,-1) + 0(0,1,1).$$

(v) Como a dimensão de $\mathbb{R}^3$ é 3, então qualquer conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$ com mais do que três vectores é linearmente dependente. O conjunto

$$\{(1,1,0),(0,2,3),(1,2,3),(x,y,z)\}$$

é formado por quatro vectores de $\mathbb{R}^3$, logo é linearmente dependente para quaisquer $x,y,z \in \mathbb{R}$.

Resolução alternativa para verificar a dependência linear: Podemos colocar os vectores do conjunto $\{(1,1,0),(0,2,3),(1,2,3),(x,y,z)\}$ como colunas de uma matriz A e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & x \\ 1 & 2 & 2 & y \\ 0 & 3 & 3 & z \end{bmatrix} \underset{-L_1+L_2\to L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 2 & 1 & y-x \\ 0 & 3 & 3 & z \end{bmatrix} \underset{-\frac{3}{2}L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow}$$

$$\underset{-\frac{3}{2}L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 2 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & z-\frac{3}{2}(y-x) \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz em escada A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto

$$\{(1,1,0),(0,2,3),(1,2,3),(x,y,z)\}$$

é linearmente dependente para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$, mas o conjunto $\{(1,1,0),(0,2,3),(1,2,3)\}$ é linearmente independente.

Observação extra: encontrámos três vectores de $\mathbb{R}^3$ linearmente independentes. Como a dimensão de $\mathbb{R}^3$ é 3, então o conjunto $\{(1,1,0),(0,2,3),(1,2,3)\}$ é desde logo uma base de $\mathbb{R}^3$, sem ser preciso verificar se gera $\mathbb{R}^3$.

Procuremos então $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$(x,y,z) = \alpha(1,1,0) + \beta(0,2,3) + \gamma(1,2,3).$$

Atendendo ao que já se fez e considerando a 4^a coluna como o termo independente do sistema, tem-se

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = x \\ \\ \alpha + 2\beta + \gamma = y \\ \\ 3\beta + 3\gamma = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = x \\ \\ 2\beta + \gamma = y - x \\ \\ \frac{3}{2}\gamma = z - \frac{3}{2}(y-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = x - \frac{2}{3}z + y \\ \\ \beta = (y-x) - \frac{1}{3}z \\ \\ \gamma = \frac{2}{3}z - y + x. \end{cases}$$

Pelo que

$$(x,y,z) = \left(x - \frac{2}{3}z + y\right)(1,1,0) + \left((y-x) - \frac{1}{3}z\right)(0,2,3) + \left(\frac{2}{3}z - y + x\right)(1,2,3).$$

21. Podemos colocar os vectores do conjunto $\{(a^2,0,1),(0,a,2),(1,0,1)\}$ como colunas de uma A matriz e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss.

$$A = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ a^2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{-a^2L_1+L_3 \to L_3}{\longrightarrow}$$

$$\underset{-a^2L_1+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -2a^2 & 1-a^2 \end{bmatrix} \underset{2aL_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a^2 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz em escada A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto

$$S_a = \left\{(a^2,0,1),(0,a,2),(1,0,1)\right\}$$

é linearmente independente se e só se $a \notin \{-1,0,1\}$. Logo, uma vez que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ e S_a tem 3 vectores, S_a será uma base de $\mathbb{R}^3$ se e só se $a \notin \{-1,0,1\}$.

22. Sejam $U = L(\{(1,1,0,0),(0,1,1,0)\})$ e $V_k = L(\{(2,k,1,0),(0,0,0,1)\})$ subespaços de $\mathbb{R}^4$. Determine os valores de k para os quais $\dim(U \cap V_k) = 1$. Coloquemos os vectores geradores de U e de V como colunas da matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{-L_1+L_3 \to L_3}{\longrightarrow}$$

$$\underset{-L_1+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{-L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Note que $U + V_k = L(U \cup V_k)$. Como

$$\dim(U \cap V_k) = \dim U + \dim V_k - \dim(U + V_k) = 2 + 2 - \dim(U + V_k) = 4 - \dim(U + V_k)$$

e

$$\dim(U + V_k) = \begin{cases} 3 & \text{se } k = 3 \\ 4 & \text{se } k \neq 3 \end{cases}$$

então $\dim(U \cap V_k) = 1$ se e só se $k = 3$.

23. (i) Seja $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Podemos colocar os vectores do conjunto

$$\{(1,0,2),(0,1,2),(x,y,z)\}$$

como colunas de uma matriz A e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 2 & 2 & z \end{bmatrix} \underset{-2L_1+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 2 & z-2x \end{bmatrix} \underset{-2L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z-2x-2y \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz em escada A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Qualquer conjunto $\{(1,0,2),(0,1,2),(x,y,z)\}$ em que $z - 2x - 2y \neq 0$ constitui uma base de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Seja $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Podemos colocar os vectores do conjunto

$$\{(2,-1,1),(-4,2,1),(x,y,z)\}$$

como colunas de uma matriz A e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & x \\ -1 & 2 & y \\ 1 & 1 & z \end{bmatrix} \underset{\substack{\frac{1}{2}L_1+L_2 \to L_2 \\ -\frac{1}{2}L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & -4 & x \\ 0 & 0 & y+\frac{x}{2} \\ 0 & 3 & z-\frac{x}{2} \end{bmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & -4 & x \\ 0 & 3 & z-\frac{x}{2} \\ 0 & 0 & y+\frac{x}{2} \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz em escada A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, qualquer conjunto

$$\{(2,-1,1),(-4,2,1),(x,y,z)\}$$

em que $y+\frac{x}{2}\neq 0$ constitui uma base de $\mathbb{R}^3$.

(iii) Seja $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Podemos colocar os vectores do conjunto

$$\{(-1,2,1),(1,0,-1),(x,y,z)\}$$

como colunas de uma matriz A e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss.

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & x \\ 2 & 0 & y \\ 1 & -1 & z \end{bmatrix} \underset{\substack{2L_1+L_2\to L_2 \\ L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 1 & x \\ 0 & 2 & y+2x \\ 0 & 0 & z+x \end{bmatrix}=A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz em escada A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, qualquer conjunto

$$\{(-1,2,1),(1,0,-1),(x,y,z)\}$$

em que $z+x\neq 0$ constitui uma base de $\mathbb{R}^3$.

24. **(i)** Seja

$$S=\left\{\cos^2 t,\operatorname{sen}^2 t,\cos 2t\right\}.$$

O conjunto S é linearmente dependente, pois:

$$\cos 2t=\cos^2 t-\operatorname{sen}^2 t.$$

Mas, o conjunto

$$S'=\left\{\cos^2 t,\operatorname{sen}^2 t\right\}$$

é linearmente independente pois se tivermos $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tais que

$$\lambda\cos^2 t+\mu\operatorname{sen}^2 t=0,$$

para todo o $t\in\mathbb{R}$, então se fizermos $t=\frac{\pi}{2}$ obtemos $\mu=0$ e a seguir se fizermos $t=0$ obtemos $\lambda=0$. Logo, $\lambda=\mu=0$. Pelo que, o conjunto $S'=\{\cos^2 t,\operatorname{sen}^2 t\}$ é uma base de $L(S)$, pois gera $L(S)$ e é linearmente independente. E então,

$$\dim L(S)=2.$$

(ii) Seja

$$S=\left\{2,\operatorname{sen}^2 t,\cos^2 t\right\}.$$

O conjunto S é linearmente dependente, pois:

$$2=2\cos^2 t+2\operatorname{sen}^2 t.$$

Mas, o conjunto

$$S'=\left\{\cos^2 t,\operatorname{sen}^2 t\right\}$$

é linearmente independente pois se tivermos $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tais que

$$\lambda\cos^2 t+\mu\operatorname{sen}^2 t=0,$$

para todo o $t \in \mathbb{R}$, então se fizermos $t = \frac{\pi}{2}$ obtemos $\mu = 0$ e a seguir se fizermos $t = 0$ obtemos $\lambda = 0$. Logo, $\lambda = \mu = 0$. Pelo que, o conjunto $S' = \{\cos^2 t, \operatorname{sen}^2 t\}$ é uma base de $L(S)$, pois gera $L(S)$ e é linearmente independente. E então,

$$\dim L(S) = 2.$$

(iii) Seja
$$S = \left\{e^t, e^{-t}, \cosh t\right\}.$$
O conjunto S é linearmente dependente, pois:

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

Mas, o conjunto
$$S' = \left\{e^t, e^{-t}\right\}$$
é linearmente independente pois se tivermos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lambda e^t + \mu e^{-t} = 0,$$

para todo o $t \in \mathbb{R}$, então se fizermos $t = 0$ obtemos $\lambda + \mu = 0$ e a seguir se fizermos $t = 1$ obtemos $\lambda e^1 + \mu e^{-1} = 0$. Logo, $\lambda = \mu = 0$. Pelo que, o conjunto $S' = \{e^t, e^{-t}\}$ é uma base de $L(S)$, pois gera $L(S)$ e é linearmente independente. E então,

$$\dim L(S) = 2.$$

(iv) Seja
$$S = \left\{1, t, t^2, (t+1)^2\right\}.$$
O conjunto S é linearmente dependente, pois:

$$\dim \mathcal{P}_2 = 3 \;\text{ e }\; S \text{ tem 4 vectores.}$$

Mas, o conjunto
$$S' = \left\{1, t, t^2\right\}$$
é linearmente independente pois trata-se da base canónica de $\mathcal{P}_2$. Logo,

$$L(S) = \mathcal{P}_2 \;\text{ e }\; \dim L(S) = \dim \mathcal{P}_2 = 3.$$

25. Seja V o espaço linear de todas as funções reais de variável real. Sejam $f, g, h \in V$, com $f(t) = \operatorname{sen} t$, $g(t) = \cos t$ e $h(t) = t$. Vejamos que o conjunto $\{f, g, h\}$ é linearmente independente. Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que
$$\alpha f + \beta g + \gamma h = \mathbf{0}.$$
Note que

$$\begin{aligned} \alpha f + \beta g + \gamma h &= \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha f(t) + \beta g(t) + \gamma h(t) = 0, \quad \text{para todo o } t \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha \operatorname{sen} t + \beta \cos t + \gamma t = 0, \quad \text{para todo o } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Para $t = 0$, $t = \pi$, $t = \dfrac{\pi}{2}$ tem-se respectivamente as seguintes equações

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha \operatorname{sen} 0 + \beta \cos 0 + \gamma 0 = 0 \\ \\ \alpha \operatorname{sen} \pi + \beta \cos \pi + \gamma \pi = 0 \\ \\ \alpha \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{2} + \beta \cos \dfrac{\pi}{2} + \gamma \dfrac{\pi}{2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \beta = 0 \\ \\ -\beta + \gamma\pi = 0 \\ \\ \alpha + \gamma \dfrac{\pi}{2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \alpha = 0. \end{array}\right.$$

Logo $\alpha = \beta = \gamma = 0$, e assim o conjunto $\{f, g, h\}$ é linearmente independente.

Observação. Como $\{f, g\} \subset \{f, g, h\}$, as funções $\operatorname{sen} t$ e $\cos t$ são linearmente independentes.

26. **(i)** Podemos colocar os vectores do conjunto $\{(1, 3), (1, -1)\}$ como colunas de uma matriz A e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \underset{-3L_1+L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz em escada A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto formado pelos vectores das colunas 1 e 2 da matriz A:

$$\{(1, 3), (1, -1)\}$$

é linearmente independente. Temos assim, dois vectores de $\mathbb{R}^2$ linearmente independentes. Como a dimensão de $\mathbb{R}^2$ é 2, então o conjunto $\mathcal{B} = \{(1, 3), (1, -1)\}$ é desde logo uma base de $\mathbb{R}^2$. (Não foi preciso verificar se $\mathcal{B}$ gera $\mathbb{R}^2$). Isto é, $\mathcal{B}$ é base de $L(\mathcal{B}) = \mathbb{R}^2$ e $\dim L(\mathcal{B}) = \dim \mathbb{R}^2 = 2$.

Determinemos agora as coordenadas do vector $(0, -1)$ em relação à base

$$\mathcal{B} = \{(1, 3), (1, -1)\}$$

de $\mathbb{R}^2$. Isto é, queremos encontrar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$(0, -1) = \alpha(1, 3) + \beta(1, -1).$$

Formando a matriz aumentada do sistema, tem-se

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & | & 0 \\ 3 & -1 & | & -1 \end{array}\right] \underset{-3L_1+L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -4 & | & -1 \end{array}\right].$$

Logo,

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta = 0 \\ \\ -4\beta = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = -\frac{1}{4} \\ \\ \beta = \frac{1}{4} \end{array}\right.$$

e assim,

$$(0, -1) = -\frac{1}{4}(1, 3) + \frac{1}{4}(1, -1).$$

Finalmente e ainda em relação à base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$, o vector cujas coordenadas são $(0, -1)$ nessa base, é dado por:

$$0(1, 3) + (-1)(1, -1) = (-1, 1).$$

(ii) O conjunto $S = \{(0,0),(1,2)\}$ contém o vector nulo, logo o conjunto é linearmente dependente, pelo que não pode ser base de $\mathbb{R}^2$. No entanto, $S' = \{(1,2)\}$ é linearmente independente e S' é base de $L(S') = L(S)$. Logo, $\dim L(S) = 1$.

(iii) O conjunto $S = \{(2,4)\}$ não pode ser base de $\mathbb{R}^2$ uma vez que tem só um vector e qualquer base de $\mathbb{R}^2$ tem sempre dois vectores (pois $\dim \mathbb{R}^2 = 2$). No entanto, $S = \{(2,4)\}$ é linearmente independente e S é base de $L(S)$. Logo, $\dim L(S) = 1$.

(iv) Facilmente se vê que o conjunto $\mathcal{B} = \{(-5,0),(0,2)\}$ é linearmente independente. Temos assim, dois vectores de $\mathbb{R}^2$ linearmente independentes. Como a dimensão de $\mathbb{R}^2$ é 2, então o conjunto $\mathcal{B} = \{(-5,0),(0,2)\}$ é desde logo uma base de $\mathbb{R}^2$. (Não foi preciso verificar se $\mathcal{B}$ gera $\mathbb{R}^2$).

Determinemos agora as coordenadas do vector $(0,-1)$ em relação à base

$$\mathcal{B} = \{(-5,0),(0,2)\}$$

de $\mathbb{R}^2$. Isto é, queremos encontrar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$(0,-1) = \alpha(-5,0) + \beta(0,2).$$

Facilmente se vê que $\beta = -\frac{1}{2}$ e $\alpha = 0$. Isto é,

$$(0,-1) = 0(-5,0) + \left(-\frac{1}{2}\right)(0,2).$$

Finalmente e ainda em relação à base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$, o vector cujas coordenadas são $(0,-1)$ nessa base, é dado por:

$$0(-5,0) + (-1)(0,2) = (0,-2).$$

(v) Como a dimensão de $\mathbb{R}^2$ é 2, então qualquer conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$ com mais do que 2 vectores é linearmente dependente. O conjunto $S = \{(1,2),(2,-3),(3,2)\}$ é formado por três vectores de $\mathbb{R}^2$, logo é linearmente dependente e como tal não pode ser uma base de $\mathbb{R}^2$. No entanto, podemos colocar os vectores do conjunto $S = \{(1,2),(2,-3),(3,2)\}$ como colunas de uma matriz A e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \underset{-2L_1+L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -4 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz em escada A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto formado pelos vectores das colunas 1 e 2 da matriz A:

$$\mathcal{B} = \{(1,2),(2,-3)\}$$

é linearmente independente. Temos assim, dois vectores de $\mathbb{R}^2$ linearmente independentes. Como a dimensão de $\mathbb{R}^2$ é 2, então o conjunto $\mathcal{B} = \{(1,2),(2,-3)\}$ é desde logo uma base de $\mathbb{R}^2$. (Não foi preciso verificar se $\mathcal{B}$ gera $\mathbb{R}^2$).

Determinemos agora as coordenadas do vector $(0,-1)$ em relação à base

$$\mathcal{B} = \{(1,2),(2,-3)\}$$

de $\mathbb{R}^2$. Isto é, queremos encontrar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$(0,-1) = \alpha \{(1,2) + \beta(2,-3)\}.$$

Formando a matriz aumentada do sistema, tem-se

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{array}\right] \underset{-2L_1+L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -1 \end{array}\right].$$

Logo,

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ \\ -7\beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{2}{7} \\ \\ \beta = \frac{1}{7} \end{cases}$$

e assim,

$$(0,-1) = -\frac{2}{7}(1,2) + \frac{1}{7}(2,-3).$$

Finalmente e ainda em relação à base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$, o vector cujas coordenadas são $(0,-1)$ nessa base, é dado por:

$$0(1,2) + (-1)(2,-3) = (-2,3).$$

(vi) $B_c^2 = \{(1,0),(0,1)\}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^2$. As coordenadas do vector $(0,-1)$ em relação à base B_c^2 são precisamente 0 e -1. Ainda em relação à base B_c^2, o vector cujas coordenadas nessa base são $(0,-1)$ é precisamente o vector $(0,-1)$.

27. **(i)** O conjunto $\{(1,2,3),(0,0,0),(0,1,2)\}$ contém o vector nulo, logo o conjunto é linearmente dependente, pelo que não pode ser base. Mas,

$$L(\{(1,2,3),(0,0,0),(0,1,2)\}) = L(\{(1,2,3),(0,1,2)\})$$

e facilmente se vê que o conjunto $\{(1,2,3),(0,1,2)\}$ é linearmente independente. Logo,

$$\dim L(\{(1,2,3),(0,0,0),(0,1,2)\}) = 2$$

e o conjunto $\{(1,2,3),(0,1,2)\}$ é uma base de $L(\{(1,2,3),(0,0,0),(0,1,2)\})$.

(ii) Facilmente se vê que o conjunto $\{(1,2,0),(0,1,-1)\}$ é linearmente independente. Logo, o conjunto $\{(1,2,0),(0,1,-1)\}$ é uma base de $L(\{(1,2,0),(0,1,-1)\})$ e

$$\dim L(\{(1,2,0),(0,1,-1)\}) = 2.$$

(iii) Podemos colocar os vectores do conjunto $\{(3,2,2),(-1,2,1),(0,1,0)\}$ como colunas de uma matriz A e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{-\frac{2}{3}L_1+L_2 \to L_2 \\ -\frac{2}{3}L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 8/3 & 1 \\ 0 & 5/3 & 0 \end{bmatrix} \underset{-\frac{5}{8}L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 8/3 & 1 \\ 0 & 0 & -5/8 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz em escada A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto $\{(3,2,2),(-1,2,1),(0,1,0)\}$ é linearmente independente. Temos assim, três vectores de $\mathbb{R}^3$ linearmente independentes. Como a dimensão de $\mathbb{R}^3$ é 3, então o conjunto $\{(3,2,2),(-1,2,1),(0,1,0)\}$ é desde logo uma base de $\mathbb{R}^3$. Vamos agora escrever o vector $(-1,1,-2)$ como combinação linear dos vectores desta base. Isto é, procuremos $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$(-1,1,-2) = \alpha(3,2,2) + \beta(-1,2,1) + \gamma(0,1,0).$$

Temos então

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \underset{\substack{-\frac{2}{3}L_1+L_2 \to L_2 \\ -\frac{2}{3}L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 8/3 & 1 & 5/3 \\ 0 & 5/3 & 0 & -4/3 \end{array}\right] \underset{-\frac{5}{8}L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 8/3 & 1 & 5/3 \\ 0 & 0 & -5/8 & -19/8 \end{array}\right].$$

Logo,

$$\begin{cases} 3\alpha - \beta = -1 \\ \\ \frac{8}{3}\beta + \gamma = \frac{5}{3} \\ \\ -\frac{5}{8}\gamma = -\frac{19}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{3}{5} \\ \\ \beta = -\frac{4}{5} \\ \\ \gamma = \frac{19}{5}. \end{cases}$$

Pelo que

$$(-1,1,-2) = \left(-\frac{3}{5}\right)(3,2,2) + \left(-\frac{4}{5}\right)(-1,2,1) + \frac{19}{5}(0,1,0).$$

Finalmente e ainda em relação à base $\{(3,2,2),(-1,2,1),(0,1,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$, o vector cujas coordenadas são $(-1,1,-2)$ nessa base, é dado por:

$$(-1)(3,2,2) + (-1,2,1) + (-2)(0,1,0) = (-4,-2,-1).$$

(iv) Facilmente se vê que o conjunto $\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ é linearmente independente. Temos então três vectores de $\mathbb{R}^3$ linearmente independentes. Como a dimensão de $\mathbb{R}^3$ é 3, então o conjunto $\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ é desde logo uma base de $\mathbb{R}^3$. Vamos agora escrever o vector $(-1,1,-2)$ como combinação linear dos vectores desta base. Isto é, procuremos $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$(-1,1,-2) = \alpha(1,1,1) + \beta(0,1,1) + \gamma(0,0,1).$$

Temos então:

$$\begin{cases} \alpha = -1 \\ \alpha + \beta = 1 \\ \alpha + \beta + \gamma = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \\ \gamma = -3. \end{cases}$$

Pelo que

$$(-1,1,-2) = (-1)(1,1,1) + 2(0,1,1) + (-3)(0,0,1).$$

Finalmente e ainda em relação à base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$, o vector cujas coordenadas são $(-1,1,-2)$ nessa base, é dado por:

$$(-1)(1,1,1) + (0,1,1) + (-2)(0,0,1) = (-1,0,-2).$$

(v) Como a dimensão de $\mathbb{R}^3$ é 3, então qualquer conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$ com mais do que três vectores é linearmente dependente. O conjunto

$$\{(1,1,-1),(2,3,4),(4,1,-1),(0,1,-1)\}$$

é formado por quatro vectores de $\mathbb{R}^3$, logo é linearmente dependente. Vamos procurar o número máximo de vectores linearmente independentes que, em conjunto, geram

$$L\left(\{(1,1,-1),(2,3,4),(4,1,-1),(0,1,-1)\}\right).$$

Podemos colocar os vectores do conjunto $\{(1,1,-1),(2,3,4),(4,1,-1),(0,1,-1)\}$ como linhas de uma A matriz e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{\substack{-2L_1+L_2\to L_2 \\ -4L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{\substack{3L_2+L_3\to L_3 \\ -L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{3L_2+L_3\to L_3 \\ -L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \underset{\substack{\frac{1}{21}L_3\to L_3 \\ \frac{1}{7}L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \underset{L_3+L_4\to L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'.$$

As linhas não nulas da matriz em escada A' são linearmente independentes. Logo, o conjunto $\{(1,1,-1),(0,1,6),(0,0,1)\}$ é formado por três vectores de $\mathbb{R}^3$, linearmente independentes. Atendendo a que a dimensão de $\mathbb{R}^3$ é 3, o conjunto

$$\{(1,1,-1),(0,1,6),(0,0,1)\}$$

é desde logo uma base de $\mathbb{R}^3$. Uma vez que $\mathcal{L}(A)=\mathcal{L}(A')$ temos então:

$$L\left(\{(1,1,-1),(2,3,4),(4,1,-1),(0,1,-1)\}\right)=L\left(\{(1,1,-1),(0,1,6),(0,0,1)\}\right)=\mathbb{R}^3.$$

Logo,

$$\dim L\left(\{(1,1,-1),(2,3,4),(4,1,-1),(0,1,-1)\}\right)=3.$$

Vamos agora escrever o vector $(-1,1,-2)$ como combinação linear dos vectores da base

$$\{(1,1,-1),(0,1,6),(0,0,1)\}.$$

Isto é, procuremos $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tais que

$$(-1,1,-2)=\alpha(1,1,-1)+\beta(0,1,6)+\gamma(0,0,1).$$

Temos então:

$$\begin{cases} \alpha=-1 \\ \alpha+\beta=1 \\ -\alpha+6\beta+\gamma=-2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-1 \\ \beta=2 \\ \gamma=-15. \end{cases}$$

Pelo que

$$(-1,1,-2)=(-1)(1,1,-1)+2(0,1,6)+(-15)(0,0,1).$$

Finalmente e ainda em relação à base $\{(1,1,-1),(0,1,6),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$, o vector cujas coordenadas são $(-1,1,-2)$ nessa base, é dado por:

$$(-1)(1,1,-1)+(0,1,6)+(-2)(0,0,1)=(-1,0,5).$$

(vi) $B_c^3=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^3$. As coordenadas do vector $(-1,1,-2)$ em relação à base B_c^3 são precisamente $-1,1$ e -2. Ainda em relação à base B_c^3, o vector cujas coordenadas nessa base são $(-1,1,-2)$ é precisamente o vector $(-1,1,-2)$.

28. **(i)** Podemos colocar os vectores do conjunto $\{(1,0,0,1),(0,1,0,0),(1,1,1,1),(0,1,1,1)\}$ como colunas de uma matriz e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{-L_1+L_4\to L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, o conjunto $\{(1,0,0,1),(0,1,0,0),(1,1,1,1),(0,1,1,1)\}$ é linearmente independente. Temos assim, quatro vectores de $\mathbb{R}^4$ linearmente independentes. Como a dimensão de $\mathbb{R}^4$ é 4, então o conjunto $\{(1,0,0,1),(0,1,0,0),(1,1,1,1),(0,1,1,1)\}$ é desde logo uma base de $\mathbb{R}^4$ e

$$\dim L\left(\{(1,0,0,1),(0,1,0,0),(1,1,1,1),(0,1,1,1)\}\right)=\dim \mathbb{R}^4=4.$$

(ii) Podemos colocar os vectores do conjunto $\{(1,-1,0,2),(3,-1,2,1),(1,0,0,1)\}$ como colunas de uma matriz e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1+L_2\to L_2 \\ -2L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -1 \end{bmatrix} \underset{\substack{-L_2+L_3\to L_3 \\ \frac{5}{2}L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{-L_2+L_3\to L_3 \\ \frac{5}{2}L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \underset{\frac{3}{2}L_3+L_4\to L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, o conjunto $\{(1,-1,0,2),(3,-1,2,1),(1,0,0,1)\}$ é linearmente independente e é assim uma base do subespaço de $\mathbb{R}^4$:

$$L\left(\{(1,-1,0,2),(3,-1,2,1),(1,0,0,1)\}\right)$$

tendo-se

$$\dim L\left(\{(1,-1,0,2),(3,-1,2,1),(1,0,0,1)\}\right)=3.$$

Atendendo ainda ao método de eliminação de Gauss, uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclui pelo menos dois vectores do conjunto apresentado:

$$\{(1,-1,0,2),(1,0,0,1),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$$

uma vez que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\cdots}{\longrightarrow} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{car}=4}.$$

(iii) Podemos colocar os vectores do conjunto

$$\{(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,0,1),(1,0,1,0),(0,0,1,1)\}$$

como colunas de uma matriz e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{-L_1+L_4 \to L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{-L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow}$$

$$\underset{-L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_3+L_4 \to L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, os vectores das colunas $1, 2, 3$ e 5 da matriz A:

$$\{(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}$$

são uma base de $\mathbb{R}^4$, por serem quatro vectores linearmente independentes de um espaço linear de dimensão 4. E

$$\dim L\left(\{(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}\right) = \dim \mathbb{R}^4 = 4.$$

(iv) Facilmente se vê que o conjunto $\{(1,0,0,2),(1,0,2,0),(1,2,0,0),(3,0,0,0)\}$ é linearmente independente. Temos então quatro vectores de $\mathbb{R}^4$ linearmente independentes. Como a dimensão de $\mathbb{R}^4$ é 4, então o conjunto

$$\{(1,0,0,2),(1,0,2,0),(1,2,0,0),(3,0,0,0)\}$$

é desde logo uma base de $\mathbb{R}^4$ e

$$\dim L\left(\{(1,0,0,2),(1,0,2,0),(1,2,0,0),(3,0,0,0)\}\right) = \dim \mathbb{R}^4 = 4.$$

(v) Podemos colocar os vectores do conjunto

$$\{(1,-2,5,-3),(2,-4,6,2),(3,-6,11,-1),(0,0,5,5)\}$$

como colunas de uma matriz e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & -4 & -6 & 0 \\ 5 & 6 & 11 & 5 \\ -3 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 5 \\ 5 & 6 & 11 & 5 \\ -2 & -4 & -6 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{3L_1+L_2 \to L_2 \\ -5L_1+L_3 \to L_3 \\ 2L_1+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{3L_1+L_2 \to L_2 \\ -5L_1+L_3 \to L_3 \\ 2L_1+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 5 \\ 0 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\frac{1}{2}L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, os vectores das colunas $1, 2$ e 4 da matriz A formam um conjunto linearmente independente:

$$\{(1,-2,5,-3),(2,-4,6,2),(0,0,5,5)\}.$$

Assim, o conjunto $\{(1,-2,5,-3),(2,-4,6,2),(0,0,5,5)\}$ é uma base de

$$L\left(\{(1,-2,5,-3),(2,-4,6,2),(0,0,5,5)\}\right),$$

tendo-se

$$\dim L\left(\{(1,-2,5,-3),(2,-4,6,2),(0,0,5,5)\}\right)=3.$$

Atendendo ainda ao método de eliminação de Gauss, uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclui pelo menos dois vectores do conjunto inicial:

$$\{(1,-2,5,-3),(0,1,0,0),(2,-4,6,2),(0,0,5,5)\}$$

uma vez que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 5 \\ -3 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \underset{\cdots}{\longrightarrow} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}}_{\text{car}=4}.$$

(vi) Podemos colocar os vectores do conjunto

$$\{(2,1,-1,2),(-1,-1,1,2),(4,-2,2,-2),(5,-2,2,2)\}$$

como colunas de uma matriz e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_3 \leftrightarrow L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{-2L_1+L_2 \to L_2 \\ -2L_1+L_3 \to L_3 \\ L_1+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{-2L_1+L_2\to L_2\\-2L_1+L_3\to L_3\\L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&-1&-2&-2\\0&1&8&9\\0&4&2&6\\0&0&0&0\end{bmatrix}\underset{-4L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&-1&-2&-2\\0&1&8&9\\0&0&-30&-30\\0&0&0&0\end{bmatrix}=A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, os vectores das colunas $1, 2$ e 3 da matriz A formam um conjunto linearmente independente:

$$\{(2,1,-1,2),(-1,-1,1,2),(4,-2,2,-2)\}.$$

Assim, o conjunto $\{(2,1,-1,2),(-1,-1,1,2),(4,-2,2,-2)\}$ é uma base de

$$L(\{(2,1,-1,2),(-1,-1,1,2),(4,-2,2,-2)\}),$$

tendo-se

$$\dim L(S)=\dim L(\{(2,1,-1,2),(-1,-1,1,2),(4,-2,2,-2)\})=3.$$

Uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclui pelo menos dois vectores do conjunto

$$\{(2,1,-1,2),(-1,-1,1,2),(4,-2,2,-2)\}:$$

$$\{(2,1,-1,2),(-1,-1,1,2),(4,-2,2,-2),(0,0,0,1)\}.$$

Vejamos que $(8,-3,3,5)\in L(S)$ e determinemos uma base de $L(S)$ que inclua o vector $(8,-3,3,5)$. Isto é, procuremos $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tais que

$$(8,-3,3,5)=\alpha(2,1,-1,2)+\beta(-1,-1,1,2)+\gamma(4,-2,2,-2).$$

Temos então:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}2&-1&4&8\\1&-1&-2&-3\\-1&1&2&3\\2&2&-2&5\end{array}\right]\underset{\substack{L_1\leftrightarrow L_2\\L_3\leftrightarrow L_4}}{\longrightarrow}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&-2&-3\\2&-1&4&8\\2&2&-2&5\\-1&1&2&3\end{array}\right]\underset{\substack{-2L_1+L_2\to L_2\\-2L_1+L_3\to L_3\\L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{-2L_1+L_2\to L_2\\-2L_1+L_3\to L_3\\L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&-2&-3\\0&1&8&14\\0&4&2&11\\0&0&0&0\end{array}\right]\underset{\substack{-2L_1+L_2\to L_2\\-2L_1+L_3\to L_3\\L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&-2&-3\\0&1&8&14\\0&0&-30&-45\\0&0&0&0\end{array}\right]. \quad (*)$$

Logo,

$$\begin{cases}\alpha=2\\ \\ \beta=2\\ \\ \gamma=\frac{3}{2}\end{cases}$$

Pelo que

$$(8,-3,3,5)=2(2,1,-1,2)+2(-1,-1,1,2)+\frac{3}{2}(4,-2,2,-2).$$

Atendendo a (*), o conjunto

$$\{(2,1,-1,2),(-1,-1,1,2),(8,-3,3,5)\}$$

é uma base de $L(S)$ que inclui o vector $(8,-3,3,5)$.

Atendendo ainda ao método de eliminação de Gauss, uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclui pelo menos dois vectores do conjunto inicial:

$$\{(2,1,-1,2),(-1,-1,1,2),(0,0,1,0),(8,-3,3,5)\}$$

uma vez que

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 8 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \underset{\cdots}{\longrightarrow} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 8 \\ 0 & -1/2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -45 \end{bmatrix}}_{\text{car}=4}.$$

29. **(i)** Podemos colocar os coeficientes dos vectores do conjunto

$$\left\{2+t-t^2, 2t+2t^2, -t^2\right\}$$

como colunas de uma matriz A e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \underset{L_1\leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1+L_2\to L_2 \\ 2L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{L_1+L_2\to L_2 \\ 2L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1+L_2\to L_2 \\ 2L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz em escada A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto

$$\left\{2+t-t^2, 2t+2t^2, -t^2\right\},$$

formado por três vectores de $\mathcal{P}_2$, é linearmente independente. Como a dimensão de $\mathcal{P}_2$ é 3, então o conjunto

$$\left\{2+t-t^2, 2t+2t^2, -t^2\right\}$$

é desde logo uma base de $\mathcal{P}_2$ tendo-se

$$L\left(\left\{2+t-t^2, 2t+2t^2, -t^2\right\}\right)=\mathcal{P}_2$$

e

$$\dim L\left(\left\{2+t-t^2, 2t+2t^2, -t^2\right\}\right)=\dim \mathcal{P}_2=3.$$

Vamos agora escrever o vector $1-t$ como combinação linear dos vectores da base

$$\left\{2+t-t^2, 2t+2t^2, -t^2\right\}.$$

Isto é, procuremos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$1 - t = \alpha(2 + t - t^2) + \beta(2t + 2t^2) + \gamma(-t^2).$$

Temos então:

$$\begin{cases} 2\alpha = 1 \\ \\ \alpha + 2\beta = -1 \\ \\ -\alpha + 2\beta - \gamma = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \\ \beta = -\frac{3}{4} \\ \\ \gamma = -2. \end{cases}$$

Pelo que

$$1 - t = \frac{1}{2}(2 + t - t^2) - \frac{3}{4}(2t + 2t^2) - 2(-t^2).$$

Finalmente e ainda em relação à base $\{2 + t - t^2, 2t + 2t^2, -t^2\}$ de $\mathcal{P}_2$, o vector cujas coordenadas são $(-1, 3, 2)$ nessa base, é dado por:

$$(-1)(2 + t - t^2) + 3(2t + 2t^2) + 2(-t^2) = -2 + 5t + 5t^2.$$

(ii) Podemos colocar os coeficientes dos vectores do conjunto

$$\left\{2t - t^2, 1 - 2t^2, 2 + t, 1 - 4t\right\}$$

como colunas de uma matriz A e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\frac{1}{2}L_1 + L_3 \to L_3}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\frac{1}{2}L_1 + L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix} \underset{2L_2 + L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} & 0 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto dos vectores correspondentes às colunas $1, 2$ e 3 da matriz A:

$$\left\{2t - t^2, 1 - 2t^2, 2 + t\right\}$$

é uma base de

$$L\left(\left\{2t - t^2, 1 - 2t^2, 2 + t, 1 - 4t\right\}\right).$$

Como a dimensão de $\mathcal{P}_2$ é 3, então o conjunto

$$\left\{2t - t^2, 1 - 2t^2, 2 + t\right\}$$

é desde logo uma base de $\mathcal{P}_2$ tendo-se

$$L\left(\left\{2t - t^2, 1 - 2t^2, 2 + t, 1 - 4t\right\}\right) = L\left(\left\{2t - t^2, 1 - 2t^2, 2 + t\right\}\right) = \mathcal{P}_2$$

e

$$\dim L\left(\left\{2t - t^2, 1 - 2t^2, 2 + t, 1 - 4t\right\}\right) = \dim \mathcal{P}_2 = 3.$$

Vamos agora escrever o vector $1-t$ como combinação linear dos vectores da base $\{2t-t^2, 1-2t^2, 2+t\}$. Isto é, procuremos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$1-t = \alpha(2t-t^2) + \beta(1-2t^2) + \gamma(2+t).$$

Temos então:

$$\begin{cases} \beta + 2\gamma = 1 \\ \\ 2\alpha + \gamma = -1 \\ \\ -\alpha - 2\beta = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{1}{3} \\ \\ \gamma = -1 + 4\beta \\ \\ \alpha = -2\beta. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{1}{3} \\ \\ \gamma = \frac{1}{3} \\ \\ \alpha = -\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Pelo que

$$1-t = -\frac{2}{3}(2t-t^2) + \frac{1}{3}(1-2t^2) + \frac{1}{3}(2+t).$$

Finalmente e ainda em relação à base $\{2t-t^2, 1-2t^2, 2+t\}$ de $\mathcal{P}_2$, o vector cujas coordenadas são $(-1, 3, 2)$ nessa base, é dado por:

$$(-1)(2t-t^2) + 3(1-2t^2) + 2(2+t) = 7 - 5t^2.$$

(iii) Podemos colocar os coeficientes dos vectores do conjunto

$$\left\{1+t^2, t-t^2, 1-t+2t^2, 1+t\right\}$$

como colunas de uma matriz A e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \underset{-L_1+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto dos vectores correspondentes às colunas $1, 2$ da matriz A:

$$\left\{1+t^2, t-t^2\right\}$$

é uma base de

$$L\left(\left\{1+t^2, t-t^2, 1-t+2t^2, 1+t\right\}\right),$$

tendo-se

$$L\left(\left\{1+t^2, t-t^2, 1-t+2t^2, 1+t\right\}\right) = L\left(\left\{1+t^2, t-t^2\right\}\right)$$

e

$$\dim L\left(\left\{1+t^2, t-t^2, 1-t+2t^2, 1+t\right\}\right) = \dim L\left(\left\{1+t^2, t-t^2\right\}\right) = 2.$$

(iv) Facilmente se vê que o conjunto $\{-1+2t+t^2, 2-t\}$ é linearmente independente. Logo, ele próprio é uma base de

$$L\left(\left\{-1+2t+t^2, 2-t\right\}\right),$$

e tem-se

$$\dim L\left(\left\{-1+2t+t^2, 2-t\right\}\right) = 2.$$

(v) Podemos colocar os coeficientes dos vectores do conjunto

$$\left\{1+2t-t^2, 3+t^2, 5+4t-t^2, -2+2t-t^2\right\}$$

como colunas de uma matriz A e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \underset{\substack{-2L_1+L_2\to L_2 \\ L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & -6 & -6 & 6 \\ 0 & 4 & 4 & -3 \end{bmatrix} \underset{\frac{1}{6}L_2\to L_2}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\frac{1}{6}L_2\to L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -3 \end{bmatrix} \underset{4L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto dos vectores correspondentes às colunas $1, 2$ e 4 da matriz A:

$$\left\{1+2t-t^2, 3+t^2, -2+2t-t^2\right\}$$

é uma base de

$$L\left(\left\{1+2t-t^2, 3+t^2, 5+4t-t^2, -2+2t-t^2\right\}\right).$$

Como a dimensão de $\mathcal{P}_2$ é 3, então o conjunto

$$\left\{1+2t-t^2, 3+t^2, -2+2t-t^2\right\}$$

é desde logo uma base de $\mathcal{P}_2$ tendo-se

$$L\left(\left\{1+2t-t^2, 3+t^2, 5+4t-t^2, -2+2t-t^2\right\}\right)=$$

$$=L\left(\left\{1+2t-t^2, 3+t^2, -2+2t-t^2\right\}\right)=\mathcal{P}_2$$

e

$$\dim L\left(\left\{1+2t-t^2, 3+t^2, 5+4t-t^2, -2+2t-t^2\right\}\right)=\dim \mathcal{P}_2 = 3.$$

Vamos agora escrever o vector $1-t$ como combinação linear dos vectores da base

$$\left\{1+2t-t^2, 3+t^2, -2+2t-t^2\right\}.$$

Isto é, procuremos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$1-t=\alpha(1+2t-t^2)+\beta(3+t^2)+\gamma(-2+2t-t^2).$$

Temos então:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Aplicando então o método de eliminação de Gauss à matriz aumentada do sistema anterior, temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{-2L_1+L_2\to L_2 \\ L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & -3 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \end{array}\right] \underset{\frac{1}{3}L_2\to L_2}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\frac{1}{3}L_2\to L_2}{\longrightarrow}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \end{array}\right]\underset{2L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Logo,

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \\ \beta = -\frac{1}{2} \\ \\ \gamma = -1. \end{cases}$$

Pelo que

$$1 - t = \frac{1}{2}(1 + 2t - t^2) + \left(-\frac{1}{2}\right)(3 + t^2) + (-1)(-2 + 2t - t^2).$$

Finalmente e ainda em relação à base $\{1 + 2t - t^2, 3 + t^2, -2 + 2t - t^2\}$ de $\mathcal{P}_2$, o vector cujas coordenadas são $(-1, 3, 2)$ nessa base, é dado por:

$$(-1)(1 + 2t - t^2) + 3(3 + t^2) + 2(-2 + 2t - t^2) = 4 + 2t + 2t^2.$$

(vi) O conjunto $\{1, t, t^2\}$ é a base canónica de $\mathcal{P}_2$. As coordenadas do vector $-1 + 3t + 2t^2$ em relação a essa base são precisamente $-1, 3$ e 2. Ainda em relação à base $\{1, t, t^2\}$, o vector cujas coordenadas nessa base são $(-1, 3, 2)$ é precisamente o vector $-1 + 3t + 2t^2$.

30. Como o espaço linear $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tem dimensão 4, então para verificar que as matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

formam uma base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ basta ver que são linearmente independentes. Sejam $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \delta\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

onde $\mathbf{0}$ é a matriz nula $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Queremos provar que $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$.

Temos então:

$$\begin{bmatrix} \alpha + \gamma & \alpha + \delta \\ \beta + \delta & \beta + \gamma + \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

isto é,

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \delta = 0 \\ \beta + \delta = 0 \\ \beta + \gamma + \delta = 0, \end{cases}$$

ou ainda

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Aplicando então o método de eliminação de Gauss à matriz dos coeficientes do sistema homogéneo anterior, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{-L_1+L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\longrightarrow}$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{-L_2+L_4 \to L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_3+L_4 \to L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, a única solução do sistema é: $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (0, 0, 0, 0)$. Assim, o conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

31. Seja $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 11 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \right\}$. Seja W um subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ gerado por S. Determinemos uma base para W que inclua vectores de S.

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 & 11 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \lambda_5 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Temos então:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 11 & -5 & 1 & -2 \\ -1 & -5 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \underset{\substack{-3L_1+L_2 \to L_2 \\ L_1+L_3 \to L_3 \\ -2L_1+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 11 & -11 & -11 & -11 \\ 0 & -5 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} \underset{\substack{\frac{5}{11}L_2+L_3 \to L_3 \\ -\frac{3}{11}L_2+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{\frac{5}{11}L_2+L_3 \to L_3 \\ -\frac{3}{11}L_2+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 11 & -11 & -11 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pelo que sendo as 2 primeiras colunas da matriz em escada anterior independentes, o conjunto de matrizes

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 11 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base de W, atendendo também a que

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in L\left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 11 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \right\} \right).$$

32. A dimensão do espaço linear $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ é 6. Assim, para encontrar uma base de $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$, basta encontrar 6 matrizes do tipo 3×2 que sejam linearmente independentes. O seguinte conjunto de 6 matrizes do tipo 3×2:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é linearmente independente. Logo, é uma base de $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$. (Chama-se a esta base, a base canónica de $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$.)

33. **(i)** Uma matriz diagonal do tipo 3×3 tem a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

E tem-se

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Isto é, o subespaço formado por todas as matrizes diagonais do tipo 3×3, é gerado pelo conjunto

$$D = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Além disso, este conjunto é linearmente independente. Temos então que o conjunto D é uma base do subespaço formado por todas as matrizes diagonais do tipo 3×3. Logo, o subespaço tem dimensão 3.

(ii) Uma matriz simétrica do tipo 3×3 tem a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}.$$

E tem-se

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ d \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + f \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Isto é, o subespaço formado por todas as matrizes simétricas do tipo 3×3, é gerado pelo conjunto

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Além disso, este conjunto é linearmente independente. Temos então que o conjunto S é uma base do subespaço formado por todas as matrizes simétricas do tipo 3×3. Logo, o subespaço tem dimensão 6.

34. (i)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} \underset{2L_1+L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo,

$$\mathcal{C}(A) = L\left(\{(3,-6)\}\right)$$

e o conjunto $\{(3,-6)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A)$. Por outro lado,

$$\mathcal{L}(A) = L\left(\{(3,1)\}\right),$$

e o conjunto $\{(3,1)\}$ é uma base de $\mathcal{L}(A)$. Desta forma:

$$\text{car} A = \dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{L}(A) = 1.$$

Por definição:

$$\mathcal{N}(A) = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 : Au = \mathbf{0} \right\}.$$

Temos então, pelo método de eliminação de Gauss,

$$Au = \mathbf{0} \Leftrightarrow A'u = \mathbf{0}.$$

A equação

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é equivalente à equação

$$3u_1 + u_2 = 0.$$

Logo,

$$\mathcal{N}(A) = \{(u_1, -3u_1) : u_1 \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(1,-3)\}\right).$$

O conjunto $S = \{(1,-3)\}$ é linearmente independente. Como S é linearmente independente e gera $\mathcal{N}(A)$, temos então que S é uma base de $\mathcal{N}(A)$ e:

$$\text{nul} A = \dim \mathcal{N}(A) = 1.$$

(ii)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \underset{-\frac{1}{3}L_1+L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo,

$$\mathcal{C}(A) = L\left(\{(3,1)\}\right)$$

e o conjunto $\{(3,1)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A)$. Por outro lado,

$$\mathcal{L}(A) = L\left(\{(3,0,-6,0)\}\right),$$

e o conjunto $\{(3,0,-6,0)\}$ é uma base de $\mathcal{L}(A)$. Desta forma:

$$\text{car}A = \dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{L}(A) = 1.$$

Por definição:

$$\mathcal{N}(A) = \left\{u \in \mathbb{R}^4 : Au = \mathbf{0}\right\}.$$

Temos então, pelo método de eliminação de Gauss,

$$Au = \mathbf{0} \Leftrightarrow A'u = \mathbf{0}.$$

A equação

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é equivalente à equação

$$3u_1 - 6u_3 = 0,$$

ou seja a

$$u_1 = 2u_3.$$

Logo,

$$\mathcal{N}(A) = \{(2u_3, u_2, u_3, u_4) : u_2, u_3, u_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Como

$$(2u_3, u_2, u_3, u_4) = u_3(2,0,1,0) + u_2(0,1,0,0) + u_4(0,0,0,1),$$

tem-se:

$$\mathcal{N}(A) = L\left(\{(2,0,1,0), (0,1,0,0), (0,0,0,1)\}\right).$$

O conjunto $S = \{(2,0,1,0), (0,1,0,0), (0,0,0,1)\}$ é linearmente independente. Como S é linearmente independente e gera $\mathcal{N}(A)$, temos então que S é uma base de $\mathcal{N}(A)$ e:

$$\text{nul}A = \dim \mathcal{N}(A) = 3.$$

(iii)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

As colunas da matriz A que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo,

$$\mathcal{C}(A) = L\left(\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}\right)$$

e o conjunto $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A)$. Por outro lado,

$$\mathcal{L}(A) = L\left(\{(0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}\right),$$

e o conjunto $\{(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ é uma base de $\mathcal{L}(A)$. Desta forma:

$$\text{car}A = \dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{L}(A) = 3.$$

Por definição:

$$\mathcal{N}(A) = \left\{u \in \mathbb{R}^4 : Au = \mathbf{0}\right\}.$$

A equação

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \\ u_4 = 0. \end{cases}$$

Logo,

$$\mathcal{N}(A) = \{(u_1,0,0,0) : u_1 \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(1,0,0,0)\}\right).$$

O conjunto $S = \{(1,0,0,0)\}$ é linearmente independente. Como S é linearmente independente e gera $\mathcal{N}(A)$, temos então que S é uma base de $\mathcal{N}(A)$ e:

$$\text{nul}A = \dim \mathcal{N}(A) = 1.$$

(iv)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{L_1+L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{-\frac{1}{3}L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo,

$$\mathcal{C}(A) = L\left(\{(1,-1,0),(1,2,1),(-2,1,-1)\}\right)$$

e o conjunto $\{(1,-1,0),(1,2,1),(-2,1,-1)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A)$. Por outro lado,

$$\mathcal{L}(A) = L\left(\{(1,1,-2),(-1,2,1),(0,1,-1)\}\right) = L\left(\left\{(1,1,-2),(0,3,-1),(0,0,-\frac{2}{3})\right\}\right),$$

e quer o conjunto $\{(1,1,-2),(-1,2,1),(0,1,-1)\}$, quer o conjunto

$$\left\{(1,1,-2),(0,3,-1),(0,0,-\frac{2}{3})\right\},$$

são bases para $\mathcal{L}(A)$. Desta forma:

$$\text{car}A = \dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{L}(A) = 3.$$

Por definição:

$$\mathcal{N}(A) = \left\{u \in \mathbb{R}^3 : Au = \mathbf{0}\right\}.$$

Como se tem sempre:

$$\text{n}^o \text{ de colunas de } A = \text{car}A + \text{nul}A,$$

então

$$\mathcal{N}(A) = \{\mathbf{0}\}$$

e

$$\text{nul}A = \dim \mathcal{N}(A) = 0.$$

Alternativamente poderíamos verificar que se tem mesmo

$$\mathcal{N}(A) = \{\mathbf{0}\}.$$

Pelo método de eliminação de Gauss, temos

$$Au = \mathbf{0} \Leftrightarrow A'u = \mathbf{0}.$$

A equação

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} u_1 + u_2 - 2u_3 = 0 \\ 3u_2 - u_3 = 0 \\ -\frac{2}{3}u_3 = 0 \end{cases}$$

ou seja a

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0.$$

Logo,

$$\mathcal{N}(A) = \{(0,0,0)\}$$

e como tal

$$\text{nul}A = \dim \mathcal{N}(A) = 0.$$

(v)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

As colunas da matriz A que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo,

$$\mathcal{C}(A) = L\left(\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}\right)$$

e o conjunto $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A)$. Por outro lado,

$$\mathcal{L}(A) = L\left(\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}\right) = \mathbb{R}^3,$$

e o conjunto $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base de $\mathcal{L}(A)$. Desta forma:

$$\operatorname{car} A = \dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{L}(A) = 3.$$

Por definição:

$$\mathcal{N}(A) = \left\{u \in \mathbb{R}^3 : Au = \mathbf{0}\right\}.$$

A equação

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 0. \end{cases}$$

Logo,

$$\mathcal{N}(A) = \{(0,0,0)\} \quad \text{e} \quad \operatorname{nul} A = \dim \mathcal{N}(A) = 0.$$

(vi)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underset{-L_1+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo,

$$\mathcal{C}(A) = L\left(\{(-1,0,-1),(3,2,3)\}\right)$$

e o conjunto $\{(-1,0,-1),(3,2,3)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A)$. Por outro lado,

$$\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(A') = L\left(\{(-1,3,0,2),(0,2,2,0)\}\right),$$

e o conjunto $\{(-1,3,0,2),(0,2,2,0)\}$ é uma base de $\mathcal{L}(A)$. Desta forma:

$$\operatorname{car} A = \dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{L}(A) = 2.$$

Por definição:

$$\mathcal{N}(A) = \left\{u \in \mathbb{R}^4 : Au = \mathbf{0}\right\}.$$

Temos então, pelo método de eliminação de Gauss,

$$Au = \mathbf{0} \Leftrightarrow A'u = \mathbf{0}.$$

A equação

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} -u_1 + 3u_2 + 2u_4 = 0 \\ 2u_2 + 2u_3 = 0 \end{cases}$$

ou seja a

$$\begin{cases} u_1 = 3u_2 + 2u_4 \\ u_3 = -u_2. \end{cases}$$

Logo,

$$\mathcal{N}(A) = \{(3u_2 + 2u_4, u_2, -u_2, u_4) : u_2, u_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Como

$$(3u_2 + 2u_4, u_2, -u_2, u_4) = (3u_2, u_2, -u_2, 0) + (2u_4, 0, 0, u_4) = u_2(3, 1, -1, 0) + u_4(2, 0, 0, 1),$$

tem-se:

$$\mathcal{N}(A) = L(\{(3, 1, -1, 0), (2, 0, 0, 1)\}).$$

O conjunto $S = \{(3, 1, -1, 0), (2, 0, 0, 1)\}$ é linearmente independente. Como S é linearmente independente e gera $\mathcal{N}(A)$, temos então que S é uma base de $\mathcal{N}(A)$ e:

$$\text{nul}A = \dim \mathcal{N}(A) = 2.$$

(vii)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{-2L_1+L_2 \to L_2 \\ -3L_1+L_3 \to L_3 \\ -L_1+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & -8 & 4 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{-2L_2+L_3 \to L_3 \\ -L_2+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo,

$$\mathcal{C}(A) = L(\{(1, 2, 3, 1), (2, 3, 4, 1)\})$$

e o conjunto $\{(1, 2, 3, 1), (2, 3, 4, 1)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A)$. Por outro lado,

$$\mathcal{L}(A) = L(\{(1, 2, 3, -1), (0, -1, -4, 2)\}),$$

e o conjunto $\{(1, 2, 3, -1), (0, -1, -4, 2)\}$ é uma base de $\mathcal{L}(A)$. Desta forma:

$$\text{car}A = \dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{L}(A) = 2.$$

Por definição:

$$\mathcal{N}(A) = \left\{u \in \mathbb{R}^4 : Au = \mathbf{0}\right\}.$$

Temos então, pelo método de eliminação de Gauss,

$$Au = \mathbf{0} \Leftrightarrow A'u = \mathbf{0}.$$

A equação

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + 3u_3 - u_4 = 0 \\ -u_2 - 4u_3 + 2u_4 = 0 \end{cases}$$

ou seja a

$$\begin{cases} u_1 = -2u_2 - 3u_3 + u_4 \\ u_2 = -4u_3 + 2u_4 \end{cases}$$

e ainda a

$$\begin{cases} u_1 = 5u_3 - 3u_4 \\ u_2 = -4u_3 + 2u_4. \end{cases}$$

Logo,

$$\mathcal{N}(A) = \{(5u_3 - 3u_4, -4u_3 + 2u_4, u_3, u_4) : u_3, u_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Como

$$\begin{aligned} (5u_3 - 3u_4, -4u_3 + 2u_4, u_3, u_4) &= (5u_3, -4u_3, u_3, 0) + (-3u_4, 2u_4, 0, u_4) \\ &= u_3(5, -4, 1, 0) + u_4(-3, 2, 0, 1), \end{aligned}$$

tem-se:

$$\mathcal{N}(A) = L(\{(5, -4, 1, 0), (-3, 2, 0, 1)\}).$$

O conjunto $S = \{(5, -4, 1, 0), (-3, 2, 0, 1)\}$ é linearmente independente. Como S é linearmente independente e gera $\mathcal{N}(A)$, temos então que S é uma base de $\mathcal{N}(A)$ e:

$$\text{nul}A = \dim \mathcal{N}(A) = 2.$$

35. Sejam U e V subespaços de W tais que $\dim U = 4, \dim V = 5$ e $\dim W = 7$. Tem-se

$$\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U + V) = 9 - \dim(U + V).$$

Como $U + V$ é subespaço de W, tem-se

$$5 = \dim V \leq \dim(U + V) \leq \dim W = 7$$

e assim $\dim(U + V) \in \{5, 6, 7\}$. Logo,

$$\dim(U \cap V) \in \{2, 3, 4\}.$$

36. Determine bases e calcule as dimensões de $U + V$ e $U \cap V$, dizendo em que casos $U + V$ é a soma directa $U \oplus V$ (determine-a) dos subespaços U e V.

(i) Em $\mathbb{R}^3$, considere os subespaços:

$$U = L(\{(1,-1,1),(0,1,1)\}) \quad \text{e} \quad V = L(\{(1,1,2),(-1,1,1)\}).$$

Logo, $U+V = L(U \cup V) = L(\{(1,-1,1),(0,1,1),(1,1,2),(-1,1,1)\})$. Facilmente se verifica que $\{(1,-1,1),(0,1,1),(-1,1,1)\}$ é uma base de $U+V$, ou melhor de $\mathbb{R}^3$. Logo, $\dim(U+V) = 3$ e

$$\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U+V) = 2+2-3 = 1.$$

Seja $(x,y,z) \in U$. Tem-se

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ -1 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{array}\right] \underset{\substack{L_1+L_2 \to L_2 \\ -L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 1 & z-x \end{array}\right] \underset{-L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & z-2x-y \end{array}\right].$$

Logo

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z-2x-y = 0\right\}.$$

Seja $(x,y,z) \in V$. Tem-se

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 1 & 1 & y \\ 2 & 1 & z \end{array}\right] \underset{\substack{-L_1+L_2 \to L_2 \\ -2L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 2 & y-x \\ 0 & 3 & z-2x \end{array}\right] \underset{-\frac{3}{2}L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 2 & y-x \\ 0 & 0 & z-\frac{3}{2}y-\frac{1}{2}x \end{array}\right].$$

Logo

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2z-3y-x = 0\right\}.$$

Deste modo

$$U \cap V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z-2x-y = 0 \;\text{ e }\; 2z-3y-x = 0\right\} = L(\{(1,3,5)\})$$

e como tal, $\{(1,3,5)\}$ é uma base de $U \cap V$, tendo-se $\dim(U \cap V) = 1$

Neste caso, como $U \cap V \neq \{\mathbf{0}\}$ então $U+V$ não é a soma directa dos subespaços U e V.

(ii) Sejam $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-z = 0 \;\text{ e }\; x+y = 0\}$, $V = L(\{(1,1,1)\})$.

Tem-se $(1,1,1) \notin U$ pois $1+1-1 \neq 0$. Logo

$$U \cap V = \{\mathbf{0}\} \quad \text{e} \quad \dim(U \cap V) = 0.$$

Por outro lado, como

$$U = \left\{(-y,y,0) \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R}\right\} = L(\{(-1,1,0)\}),$$

tem-se

$$U+V = L(\{(-1,1,0),(1,1,1)\})$$

e sendo $\{(-1,1,0),(1,1,1)\}$ uma base de $U+V$, $\dim(U+V) = 2$.

Além disso, como $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$,

$$U+V = U \oplus V = L(\{(-1,1,0),(1,1,1)\}).$$

(iii) Em $\mathbb{R}^3$, considere os subespaços:

$$U = L\left(\{(1,0,1),(-1,1,2)\}\right) \quad \text{e} \quad V = \{(x,y,z) : x+y+3z=0\}\,.$$

Seja $v \in U$, então

$$v = \alpha(1,0,1) + \beta(-1,1,2) = (\alpha - \beta, \beta, \alpha + 2\beta),$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Para que v esteja também em V é preciso que:

$$\alpha - \beta + \beta + 3\,(\alpha + 2\beta) = 0.$$

isto é,

$$4\alpha + 6\beta = 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha = -\frac{3}{2}\beta.$$

Assim,

$$v = \alpha(1,0,1) + \beta(-1,1,2) = \left(-\frac{5}{2}\beta, \beta, \frac{1}{2}\beta\right) = \beta\left(-\frac{5}{2}, 1, \frac{1}{2}\right).$$

Logo,

$$U \cap V = \left\{\beta\left(-\frac{5}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) : \beta \in \mathbb{R}\right\} = L\left(\left\{\left(-\frac{5}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)\right\}\right)$$

e como tal, $\left\{\left(-\frac{5}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)\right\}$ é uma base de $U \cap V$, tendo-se $\dim(U \cap V) = 1$

Tem-se

$$V = L\left(\{(-1,1,0),(-3,0,1)\}\right).$$

Logo,

$$U + V = L\,(U \cup V) = L\left(\{(1,0,1),(-1,1,2),(-1,1,0),(-3,0,1)\}\right).$$

Facilmente se verifica que $\{(1,0,1),(-1,1,2),(-1,1,0)\}$ é uma base de $U+V$, ou melhor de $\mathbb{R}^3$. Logo, $\dim(U+V) = 3$.

Neste caso, como $U \cap V \neq \{\mathbf{0}\}$ então $U+V$ não é a soma directa dos subespaços U e V.

(iv) Em $\mathbb{R}^3$, considere os subespaços:

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\right\} \quad \text{e} \quad V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\right\}.$$

Tem-se $U = L\left(\{(1,1,1)\}\right)$ e $V = L\left(\{(0,1,0),(0,0,1)\}\right)$.

Como $\{(1,1,1),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base de $U+V = L\,(U \cup V)$ então

$$\dim(U+V) = 3 \quad \text{e} \quad U+V = U \oplus V = \mathbb{R}^3.$$

Como $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$ então $\dim(U \cap V) = 0$.

(v) Em $\mathcal{P}_2$, considere os subespaços:

$$U = L\left(\left\{1+t, 1-t^2\right\}\right) \quad \text{e} \quad V = \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 - a_1 + a_0 = 0\right\}.$$

Seja $p(t) \in U$. Então existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 = \alpha\,(1+t) + \beta\left(1 - t^2\right).$$

Atendendo a

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a_0 \\ 1 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & a_2 \end{array}\right] \underset{-L_1+L_2\to L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a_0 \\ 0 & -1 & a_1-a_0 \\ 0 & -1 & a_2 \end{array}\right] \underset{-L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a_0 \\ 0 & -1 & a_1-a_0 \\ 0 & 0 & a_2-a_1+a_0 \end{array}\right].$$

Logo, tem-se

$$U = V$$

pelo que

$$U+V = U = V \quad \text{e} \quad U\cap V = U = V.$$

Assim, $\{1+t, 1-t^2\}$ é uma base de U, de V, de $U+V$ e de $U\cap V$, tendo-se

$$\dim(U+V) = \dim(U\cap V) = 2.$$

Neste caso, como $U\cap V \neq \{\mathbf{0}\}$ então $U+V$ não é a soma directa dos subespaços U e V.

(vi) Em $\mathcal{P}_3$, considere os subespaços:

$$U = L\left(\left\{1+t, 1-t^3\right\}\right) \quad \text{e} \quad V = L\left(\left\{1+t+t^2, t-t^3, 1+t+t^3\right\}\right).$$

Logo

$$U+V = L(U\cup V) = L\left(\left\{1+t, 1-t^3, 1+t+t^2, t-t^3, 1+t+t^3\right\}\right).$$

Vejamos quais dos vectores do conjunto

$$\left\{1+t, 1-t^3, 1+t+t^2, t-t^3, 1+t+t^3\right\}$$

são linearmente independentes. Coloquemos então os coeficientes desses vectores como colunas de uma matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{-L_1+L_2\to L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{-L_2+L_4\to L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = A'. \ (*)$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto

$$\left\{1+t, 1-t^3, 1+t+t^2, t-t^3\right\}$$

é uma base de $U+V$, tendo-se $\dim(U+V) = 4$ e deste modo $U+V = \mathcal{P}_3$.

Por outro lado, também se conclui de (*) que o conjunto

$$\left\{1+t, 1-t^3\right\}$$

é base de U, tendo-se $\dim U = 2$, e como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{-L_1+L_3\to L_3 \\ L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \underset{2L_2+L_4\to L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_3+L_4\to L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

o conjunto
$$\left\{1+t+t^2, t-t^3, 1+t+t^3\right\}$$
é base de V, tendo-se $\dim V = 3$.

Logo,
$$\dim(U\cap V) = \dim U + \dim V - \dim\left(U+V\right) = 2+3-4 = 1.$$

Neste caso, como $U\cap V \neq \{\mathbf{0}\}$ então $U+V$ não é a soma directa dos subespaços U e V.

Determinemos $U\cap V$. Seja $p\left(t\right) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in U$. Tem-se
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a_0 \\ 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_2 \\ 0 & -1 & a_3 \end{array}\right] \underset{-L_1+L_2\to L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a_0 \\ 0 & -1 & a_1-a_0 \\ 0 & 0 & a_2 \\ 0 & -1 & a_3 \end{array}\right] \underset{-L_2+L_4\to L_4}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a_0 \\ 0 & -1 & a_1-a_0 \\ 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3+a_0-a_1 \end{array}\right].$$

Logo
$$U = \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in \mathcal{P}_3 : a_2 = 0 \ \text{ e } \ a_3 + a_0 - a_1 = 0\right\}.$$

Seja $q\left(t\right) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in V$. Tem-se
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_0 \\ 1 & 1 & 1 & a_1 \\ 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & -1 & 1 & a_3 \end{array}\right] \underset{\substack{-L_1+L_2\to L_2 \\ -L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_0 \\ 0 & 1 & 0 & a_1-a_0 \\ 0 & 0 & -1 & a_2-a_0 \\ 0 & -1 & 1 & a_3 \end{array}\right] \underset{L_2+L_4\to L_4}{\longrightarrow}$$
$$\underset{L_2+L_4\to L_4}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_0 \\ 0 & 1 & 0 & a_1-a_0 \\ 0 & 0 & -1 & a_2-a_0 \\ 0 & 0 & 1 & a_1-a_0+a_3 \end{array}\right] \underset{L_3+L_4\to L_4}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_0 \\ 0 & 1 & 0 & a_1-a_0 \\ 0 & 0 & -1 & a_2-a_0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1+a_2-2a_0+a_3 \end{array}\right].$$

Logo
$$V = \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in \mathcal{P}_3 : a_1 + a_2 - 2a_0 + a_3 = 0\right\}.$$

Deste modo
$$U\cap V = \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in \mathcal{P}_3 : a_2 = 0 \ \text{ e } \ a_0 - a_1 + a_3 = 0 \ \text{ e } \ -2a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0\right\} =$$
$$= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in \mathcal{P}_3 : (a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

Atendendo a que
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{2L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \underset{L_1\leftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \underset{L_2\leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

tem-se
$$U\cap V = \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in \mathcal{P}_3 : a_0 - a_1 + a_3 = 0 \ \text{ e } \ -a_1 + a_2 + 3a_3 = 0 \ \text{ e } \ a_2 = 0\right\} =$$
$$= \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in \mathcal{P}_3 : a_0 = 2a_3 \ \text{ e } \ a_1 = 3a_3 \ \text{ e } \ a_2 = 0\right\} =$$

$$= \left\{2a_3 + 3a_3 t + a_3 t^3 \in \mathcal{P}_3 : a_3 \in \mathbb{R}\right\} = \left\{a_3\left(2 + 3t + t^3\right) \in \mathcal{P}_3 : a_3 \in \mathbb{R}\right\} = L\left(\left\{2 + 3t + t^3\right\}\right).$$

e como tal, $\{2 + 3t + t^3\}$ é uma base de $U \cap V$, tendo-se $\dim(U \cap V) = 1$.

(vii) Em $\mathbb{R}^4$, considere os subespaços:

$$U = L\left(\{(2, -2, 1, -2), (-1, 1, 1, 3), (0, 0, -6, -8), (-1, 1, -5, -5)\}\right)$$

e

$$V = L\left(\{(0, 0, 0, -1), (0, 1, 2, 3), (0, 2, 4, 8)\}\right).$$

Atendendo a que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -6 & -5 & 0 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & -8 & -5 & -1 & 3 & 8 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1+L_2 \to L_2 \\ -\frac{1}{2}L_1+L_3 \to L_3 \\ L_1+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3/2 & -6 & -9/2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -8 & -6 & -1 & 3 & 8 \end{bmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_4}{\longrightarrow}$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & -6 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 3/2 & -6 & -9/2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{-\frac{3}{4}L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & -6 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & -1/4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = A' \quad (*).$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto

$$\{(2, -2, 1, -2), (-1, 1, 1, 3), (0, 1, 2, 3), (0, 2, 4, 8)\}$$

é uma base de $U + V$, tendo-se $\dim(U + V) = 4$ e deste modo $U + V = \mathbb{R}^4$.

Por outro lado, também se conclui de (*) que o conjunto

$$\{(2, -2, 1, -2), (-1, 1, 1, 3)\}$$

é base de U, tendo-se $\dim U = 2$, e como

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 8 \\ 3/4 & -1/4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & -1/4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftrightarrow L_4 \\ 4L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{3L_1+L_3 \to L_3}{\longrightarrow}$$

$$\underset{3L_1+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{-8L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

o conjunto

$$\{(0, 0, 0, -1), (0, 1, 2, 3)\}$$

é base de V, tendo-se $\dim V = 2$.

Logo,

$$\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U + V) = 2 + 2 - 4 = 0.$$

Neste caso, como $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$ então

$$U + V = U \oplus V = \mathbb{R}^4.$$

(viii) Em $\mathbb{R}^4$, considere os subespaços:

$$U = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y + 3z = 0 \;\text{ e }\; y + 2z + 3w = 0\right\}$$

e

$$V = L\left(\{(2, 5, -4, 1), (0, 9, -6, 1), (-4, -1, 2, -1)\}\right).$$

Seja $(x, y, z, w) \in V$. Então existem $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$(x, y, z, w) = \alpha(2, 5, -4, 1) + \beta(0, 9, -6, 1) + \gamma(-4, -1, 2, -1).$$

Atendendo a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -4 & x \\ 5 & 9 & -1 & y \\ -4 & -6 & 2 & z \\ 1 & 1 & -1 & w \end{array}\right] \underset{L_1 \leftrightarrow L_4}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & w \\ 5 & 9 & -1 & y \\ -4 & -6 & 2 & z \\ 2 & 0 & -4 & x \end{array}\right] \underset{\substack{-5L_1+L_2 \to L_2 \\ 4L_1+L_3 \to L_3 \\ -2L_1+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{-5L_1+L_2 \to L_2 \\ 4L_1+L_3 \to L_3 \\ -2L_1+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & w \\ 0 & 4 & 4 & y - 5w \\ 0 & -2 & -2 & z + 4w \\ 0 & -2 & -2 & x - 2w \end{array}\right] \underset{\substack{\frac{1}{2}L_2+L_3 \to L_3 \\ \frac{1}{2}L_2+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & w \\ 0 & 4 & 4 & y - 5w \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2}w + \frac{1}{2}y + z \\ 0 & 0 & 0 & x - \frac{9}{2}w + \frac{1}{2}y \end{array}\right] \quad (*)$$

Logo, tem-se

$$V = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \frac{3}{2}w + \frac{1}{2}y + z = 0 \;\text{ e }\; x - \frac{9}{2}w + \frac{1}{2}y = 0\right\} =$$

$$= \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : y + 2z + 3w = 0 \;\text{ e }\; x + 2y + 3z = 0\right\} = U$$

pelo que

$$U + V = U = V \quad \text{e} \quad U \cap V = U = V.$$

Atendendo ainda a (*), o conjunto $\{(2, 5, -4, 1), (0, 9, -6, 1), (-4, -1, 2, -1)\}$ é linearmente dependente, sendo linearmente independente o seguinte seu subconjunto

$$\{(2, 5, -4, 1), (0, 9, -6, 1)\}.$$

Assim, $\{(2, 5, -4, 1), (0, 9, -6, 1)\}$ é uma base de U, de V, de $U + V$ e de $U \cap V$, tendo-se

$$\dim (U + V) = \dim (U \cap V) = 2.$$

Neste caso, como $U \cap V \neq \{\mathbf{0}\}$ então $U + V$ não é a soma directa dos subespaços U e V.

(ix) Seja U o subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado por

$$\{(1, -1, -1, -2, 0), (1, -2, -2, 0, -3), (1, -1, -2, -2, 1)\}.$$

Seja V o subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado por

$$\{(1,-2,-3,0,-2),(1,-1,-3,2,-4),(1,-1,-2,2,-5)\}.$$

Atendendo a que

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & -3 & -3 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & -4 & -5 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1+L_2\to L_2 \\ L_1+L_3\to L_3 \\ 2L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & -4 & -5 \end{bmatrix} \underset{\substack{-L_2+L_3\to L_3 \\ 2L_2+L_4\to L_4 \\ -3L_2+L_5\to L_5}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{-L_2+L_3\to L_3 \\ 2L_2+L_4\to L_4 \\ -3L_2+L_5\to L_5}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \end{bmatrix} \underset{L_3+L_5\to L_5}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -6 \end{bmatrix} \underset{\frac{3}{2}L_4+L_5\to L_5}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\frac{3}{2}L_4+L_5\to L_5}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A' \quad (*).$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto

$$\{(1,-1,-1,-2,0),(1,-2,-2,0,-3),(1,-1,-2,-2,1),(1,-1,-3,2,-4)\}$$

é uma base de $U+V$, tendo-se $\dim(U+V)=4$.

Por outro lado, também se conclui de (*) que o conjunto

$$\{(1,-1,-1,-2,0),(1,-2,-2,0,-3),(1,-1,-2,-2,1)\}$$

é base de U, tendo-se $\dim U=3$, e como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1+L_2\to L_2 \\ L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2+L_3\to L_3 \\ -4L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

o conjunto

$$\{(1,-2,-3,0,-2),(1,-1,-3,2,-4),(1,-1,-2,2,-5)\}$$

é base de V, tendo-se $\dim V=3$.

Logo,

$$\dim(U\cap V)=\dim U+\dim V-\dim(U+V)=3+3-4=2.$$

Neste caso, como $U\cap V\neq\{\mathbf{0}\}$ então $U+V$ não é a soma directa dos subespaços U e V.

Determinemos uma base para $U\cap V$.

Atendendo a

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & x_1 \\ -1 & -2 & -1 & | & x_2 \\ -1 & -2 & -2 & | & x_3 \\ -2 & 0 & -2 & | & x_4 \\ 0 & -3 & 1 & | & x_5 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1+L_2\to L_2 \\ L_1+L_3\to L_3 \\ 2L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & x_1 \\ 0 & -1 & 0 & | & x_1+x_2 \\ 0 & -1 & -1 & | & x_1+x_3 \\ 0 & 2 & 0 & | & 2x_1+x_4 \\ 0 & -3 & 1 & | & x_5 \end{bmatrix} \underset{\substack{-L_2+L_3\to L_3 \\ 2L_2+L_4\to L_4 \\ -3L_2+L_5\to L_5}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{-L_2+L_3\to L_3 \\ 2L_2+L_4\to L_4 \\ -3L_2+L_5\to L_5}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & x_1 \\ 0 & -1 & 0 & | & x_1+x_2 \\ 0 & 0 & -1 & | & -x_2+x_3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 4x_1+2x_2+x_4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -3x_1-3x_2+x_5 \end{bmatrix} \underset{L_3+L_5\to L_5}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & x_1 \\ 0 & -1 & 0 & | & x_1+x_2 \\ 0 & 0 & -1 & | & -x_2+x_3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 4x_1+2x_2+x_4 \\ 0 & 0 & 0 & | & -3x_1-4x_2+x_3+x_5 \end{bmatrix}$$

tem-se

$$U=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbb{R}^5 : 4x_1+2x_2+x_4=0 \ \text{ e } \ -3x_1-4x_2+x_3+x_5=0\right\}.$$

Por outro lado, atendendo a

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & x_1 \\ -2 & -1 & -1 & | & x_2 \\ -3 & -3 & -2 & | & x_3 \\ 0 & 2 & 2 & | & x_4 \\ -2 & -4 & -5 & | & x_5 \end{bmatrix} \underset{\substack{2L_1+L_2\to L_2 \\ 3L_1+L_3\to L_3 \\ 2L_1+L_5\to L_5}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2x_1+x_2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3x_1+x_3 \\ 0 & 2 & 2 & | & x_4 \\ 0 & -2 & -3 & | & 2x_1+x_5 \end{bmatrix} \underset{\substack{-2L_2+L_4\to L_4 \\ L_3+L_5\to L_5}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{-2L_2+L_4\to L_4 \\ L_3+L_5\to L_5}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2x_1+x_2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3x_1+x_3 \\ 0 & 0 & 0 & | & -4x_1-2x_2+x_4 \\ 0 & -2 & -2 & | & 5x_1+x_3+x_5 \end{bmatrix} \underset{2L_2+L_5\to L_5}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2x_1+x_2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3x_1+x_3 \\ 0 & 0 & 0 & | & -4x_1-2x_2+x_4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 9x_1+2x_2+x_3+x_5 \end{bmatrix}$$

tem-se

$$V=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbb{R}^5 : -4x_1-2x_2+x_4=0 \ \text{ e } \ 9x_1+2x_2+x_3+x_5=0\right\}.$$

Logo

$$U\cap V=\left\{\begin{array}{c}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbb{R}^5 : 4x_1+2x_2+x_4=0 \ \text{ e } \ -3x_1-4x_2+x_3+x_5=0 \\ \text{e } -4x_1-2x_2+x_4=0 \ \text{ e } \ 9x_1+2x_2+x_3+x_5=0\end{array}\right\}$$

Como

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1+L_3\to L_3 \\ 3L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -10 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \underset{\frac{3}{4}L_1+L_2\to L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 1 & \frac{3}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -10 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \underset{-4L_2+L_4\to L_4}{\longrightarrow}$$

$$\underset{-4L_2+L_4\to L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 1 & \frac{3}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{4L_2\to L_2 \\ \frac{3}{2}L_3+L_4\to L_{44}}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tem-se

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ -10x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_2 = -\frac{1}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_5 \\ x_2 = \frac{2}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_5 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

pelo que

$$\begin{aligned} U \cap V &= \left\{ \left(-\frac{1}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_5, \frac{2}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_5, x_3, 0, x_5 \right) \in \mathbb{R}^5 : x_3, x_5 \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= L\left(\left\{ \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1, 0, 0 \right), \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 0, 0, 1 \right) \right\} \right). \end{aligned}$$

Como o conjunto

$$\left\{ \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1, 0, 0 \right), \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 0, 0, 1 \right) \right\}$$

gera $U \cap V$ e é linearmente independente, então é uma base de $U \cap V$, tendo-se $\dim (U \cap V) = 2$.

(x) Atendendo a que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1+L_3 \to L_3 \\ -\frac{1}{2}L_1+L_3 \to L_3 \\ L_1+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{-L_2+L_3 \to L_3 \\ -L_2+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{-L_2+L_3 \to L_3 \\ -L_2+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \underset{2L_3+L_4 \to L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -5 & 3 \end{bmatrix} = A' \quad (*).$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto

$$\{(1, 0, -1, 0), (0, 1, 1, 1), (1, 0, 0, -2), (1, 1, 1, 1)\}$$

é uma base de $U + V$, tendo-se $\dim (U + V) = 4$ e assim $U + V = \mathbb{R}^4$.

Por outro lado, também se conclui de (*) que o conjunto

$$\{(1, 0, -1, 0), (0, 1, 1, 1), (1, 0, 0, -2)\}$$

é base de U, tendo-se $\dim U = 3$, e como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix} \underset{\substack{-L_1+L_2 \to L_2 \\ -L_1+L_3 \to L_3 \\ -2L_1+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 3 \end{bmatrix} \underset{\substack{2L_2+L_3 \to L_3 \\ 7L_2+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \underset{-3L_3+L_4 \to L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

o conjunto

$$\{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 0, -1), (0, 0, 1, 1)\}$$

é base de V, tendo-se $\dim V = 3$.

Logo,

$$\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U+V) = 3+3-4 = 2.$$

Uma base para $U \cap V$.

Atendendo a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ -1 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 1 & -2 & x_4 \end{array}\right] \underset{L_1+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_1+x_3 \\ 0 & 1 & -2 & x_4 \end{array}\right] \underset{\substack{-L_2+L_3\to L_3 \\ -L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{-L_2+L_3\to L_3 \\ -L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_1+x_3-x_2 \\ 0 & 0 & -2 & x_4-x_2 \end{array}\right] \underset{2L_3+L_4\to L_4}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_1+x_3-x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 2x_1-3x_2+2x_3+x_4 \end{array}\right]$$

tem-se

$$U = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0\right\}$$

Por outro lado, atendendo a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 2 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 & x_3 \\ 1 & -1 & 1 & x_4 \end{array}\right] \underset{\substack{-L_1+L_2\to L_2 \\ -L_1+L_3\to L_3 \\ -L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2-x_1 \\ 0 & -1 & 1 & x_3-x_1 \\ 0 & -2 & 1 & x_4-x_1 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2+L_3\to L_3 \\ 2L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{L_2+L_3\to L_3 \\ 2L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2-x_1 \\ 0 & 0 & 1 & x_2-2x_1+x_3 \\ 0 & 0 & 1 & 2x_2-3x_1+x_4 \end{array}\right] \underset{-L_3+L_4\to L_4}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2-x_1 \\ 0 & 0 & 1 & x_2-2x_1+x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_2-x_1-x_3+x_4 \end{array}\right]$$

tem-se

$$V = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\right\}.$$

Logo

$$\begin{aligned} U \cap V &= \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \ \text{ e } \ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\right\} = \\ &= \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_2 = 3x_4 \ \text{ e } \ x_1 = -x_3 + 4x_4\right\} = \\ &= \{(-x_3+4x_4, 3x_4, x_3, x_4) : x_3, x_4) \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(-1,0,1,0), (4,3,0,1)\}\right) \end{aligned}$$

Como o conjunto

$$\{(-1,0,1,0), (4,3,0,1)\}$$

gera $U \cap V$ e é linearmente independente, então é uma base de $U \cap V$, tendo-se $\dim(U \cap V) = 2$.

37.

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&0&2&1\\0&0&2&4&0\\2&-2&-1&2&1\\-1&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\underset{\substack{-2L_1+L_3\to L_3\\L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&-1&0&2&1\\0&0&2&4&0\\0&0&-1&-2&-1\\0&0&2&4&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\underset{\substack{\frac{1}{2}L_2+L_3\to L_3\\-L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{\frac{1}{2}L_2+L_3\to L_3\\-L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&-1&0&2&1\\0&0&2&4&0\\0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\underset{2L_3+L_4\to L_4}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&-1&0&2&1\\0&0&2&4&0\\0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=A'.$$

(i)

$$\mathrm{car}A=\dim\mathcal{C}(A)=\dim\mathcal{L}(A)=3.$$

Como A tem 5 colunas e

$$\mathrm{n}^o \text{ de colunas de } A=\mathrm{car}A+\mathrm{nul}A,$$

então

$$\mathrm{nul}A=2,\qquad \text{isto é},\quad \dim\mathcal{N}(A)=2.$$

(ii) As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo,

$$\mathcal{C}(A)=L\left(\{(1,0,2,-1,0),(0,2,-1,2,0),(1,0,1,1,0)\}\right)$$

e o conjunto $\{(1,0,2,-1,0),(0,2,-1,2,0),(1,0,1,1,0)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A)$.

Por definição:

$$\mathcal{N}(A)=\left\{u\in\mathbb{R}^5 : Au=\mathbf{0}\right\}.$$

Temos então, pelo método de eliminação de Gauss,

$$Au=\mathbf{0}\Leftrightarrow A'u=\mathbf{0}.$$

A equação matricial

$$\begin{bmatrix}1&-1&0&2&1\\0&0&2&4&0\\0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\\u_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

é equivalente ao sistema

$$\begin{cases}u_1-u_2+2u_4+u_5=0\\2u_3+4u_4=0\\-u_5=0\end{cases}$$

ou seja a

$$\begin{cases}u_1=u_2-2u_4\\u_3=-2u_4\\u_5=0.\end{cases}$$

Logo,

$$\mathcal{N}(A) = \{(u_2 - 2u_4, u_2, -2u_4, u_4, 0) : u_2, u_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Como

$$\begin{aligned}(u_2 - 2u_4, u_2, -2u_4, u_4, 0) &= (u_2, u_2, 0, 0, 0) + (-2u_4, 0, -2u_4, u_4, 0) \\ &= u_2(1, 1, 0, 0, 0) + u_4(-2, 0, -2, 1, 0),\end{aligned}$$

tem-se:

$$\mathcal{N}(A) = L(\{(1, 1, 0, 0, 0), (-2, 0, -2, 1, 0)\}).$$

Facilmente se verifica que o conjunto $S = \{(1, 1, 0, 0, 0), (-2, 0, -2, 1, 0)\}$ é linearmente independente. Como S é linearmente independente e gera $\mathcal{N}(A)$, temos então que S é uma base de $\mathcal{N}(A)$.

(iii) A solução geral do sistema de equações lineares homogéneo $Au = \mathbf{0}$ é dada por

$$\lambda(1, 1, 0, 0, 0) + \mu(-2, 0, -2, 1, 0),$$

com $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(iv) Uma solução particular de $Au = b$, com $b = (1, 0, 2, -1, 0)$, é por exemplo $u = (1, 0, 0, 0, 0)$. Logo, a solução geral de $Au = b$ é dada por:

$$(1, 0, 0, 0, 0) + \lambda(1, 1, 0, 0, 0) + \mu(-2, 0, -2, 1, 0).$$

Observação. Note que se tem sempre:

$$\text{n}^o \text{ de colunas de } A = \text{car}A + \text{nul}A.$$

38. (i) Se $A \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ é tal que car $A = 3$ e car$[A \mid B] = 3$ então

$$\text{car}\, A = \dim \mathcal{L}(A) = \dim \mathcal{C}(A) = 3.$$

Logo,

$$\text{nul}\, A = \dim \mathcal{N}(A) = 0.$$

Como car$A^T = \dim \mathcal{L}(A^T) = \dim \mathcal{C}(A^T) = 3$ então

$$\text{nul}\, A^T = \dim \mathcal{N}(A^T) = 0.$$

O correspondente sistema de equações lineares não homogéneo $AX = B$ é possível e determinado. Neste caso, na solução geral de $AX = B$, não existe nenhum parâmetro.

(ii) Se $A \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ é tal que car $A = 2$ e car$[A \mid B] = 3$ então

$$\text{car}\, A = \dim \mathcal{L}(A) = \dim \mathcal{C}(A) = 2.$$

Logo,

$$\text{nul}\, A = \dim \mathcal{N}(A) = 1.$$

Como $\text{car}A^T = \dim \mathcal{L}(A^T) = \dim \mathcal{C}(A^T) = 2$ então

$$\text{nul}\, A^T = \dim \mathcal{N}(A^T) = 1.$$

O correspondente sistema de equações lineares não homogéneo $AX = B$ é impossível.

(iii) Se $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ é tal que $\text{car}\, A = 1$ e $\text{car}[A \mid B] = 1$ então

$$\text{car}\, A = \dim \mathcal{L}(A) = \dim \mathcal{C}(A) = 1.$$

Logo,

$$\text{nul}\, A = \dim \mathcal{N}(A) = 2.$$

Como $\text{car}A^T = \dim \mathcal{L}(A^T) = \dim \mathcal{C}(A^T) = 1$ então

$$\text{nul}\, A^T = \dim \mathcal{N}(A^T) = 2.$$

O correspondente sistema de equações lineares não homogéneo $AX = B$ é possível e indeterminado. Neste caso, na solução geral de $AX = B$, existem dois parâmetros.

(iv) Se $A \in M_{5\times 9}(\mathbb{R})$ é tal que $\text{car}\, A = 2$ e $\text{car}[A \mid B] = 2$ então

$$\text{car}\, A = \dim \mathcal{L}(A) = \dim \mathcal{C}(A) = 2.$$

Logo,

$$\text{nul}\, A = \dim \mathcal{N}(A) = 7.$$

Como $\text{car}A^T = \dim \mathcal{L}(A^T) = \dim \mathcal{C}(A^T) = 2$ então

$$\text{nul}\, A^T = \dim \mathcal{N}(A^T) = 3.$$

O correspondente sistema de equações lineares não homogéneo $AX = B$ é possível e indeterminado. Neste caso, na solução geral de $AX = B$, existem 7 parâmetros.

(v) Se $A \in M_{9\times 5}(\mathbb{R})$ é tal que $\text{car}\, A = 2$ e $\text{car}[A \mid B] = 3$ então

$$\text{car}\, A = \dim \mathcal{L}(A) = \dim \mathcal{C}(A) = 2.$$

Logo,

$$\text{nul}\, A = \dim \mathcal{N}(A) = 3.$$

Como $\text{car}A^T = \dim \mathcal{L}(A^T) = \dim \mathcal{C}(A^T) = 2$ então

$$\text{nul}\, A^T = \dim \mathcal{N}(A^T) = 7.$$

O correspondente sistema de equações lineares não homogéneo $AX = B$ é impossível.

(vi) Se $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ é tal que $\text{car}\, A = 0$ e $\text{car}[A \mid B] = 0$ então

$$\text{car}\, A = \dim \mathcal{L}(A) = \dim \mathcal{C}(A) = 0.$$

Logo,

$$\text{nul}\, A = \dim \mathcal{N}(A) = 4.$$

Como $\text{car}A^T = \dim \mathcal{L}(A^T) = \dim \mathcal{C}(A^T) = 0$ então

$$\text{nul}\, A^T = \dim \mathcal{N}(A^T) = 4.$$

O correspondente sistema de equações lineares não homogéneo $AX = B$ é possível e indeterminado. Neste caso, na solução geral de $AX = B$, existem 4 parâmetros.

(vii) Se $A \in M_{6\times 2}(\mathbb{R})$ é tal que $\text{car}\, A = 2$ e $\text{car}[A \mid B] = 2$ então

$$\text{car}\, A = \dim \mathcal{L}(A) = \dim \mathcal{C}(A) = 2.$$

Logo,

$$\text{nul}\, A = \dim \mathcal{N}(A) = 0.$$

Como $\text{car}A^T = \dim \mathcal{L}(A^T) = \dim \mathcal{C}(A^T) = 2$ então

$$\text{nul}\, A^T = \dim \mathcal{N}(A^T) = 4.$$

O correspondente sistema de equações lineares não homogéneo $AX = B$ é possível e determinado. Neste caso, na solução geral de $AX = B$, não existe nenhum parâmetro.

39. Queremos encontrar A tal que $\mathcal{N}(A) = L(\{(2,0,1)\})$. Por definição $\mathcal{N}(A) = \{u \in \mathbb{R}^3 : Au = \mathbf{0}\}$. Por outro lado, temos

$$L(\{(2,0,1)\}) = \{\lambda(2,0,1) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \left\{(u_1,u_2,u_3) \in \mathbb{R}^3 : u_2 = 0 \;\text{ e }\; u_1 = 2u_3\right\}.$$

Por exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

verifica

$$\mathcal{N}(A) = L(\{(2,0,1)\}),$$

pois

$$Au = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -u_1 + 2u_3 = 0 \\ \\ u_2 = 0. \end{cases}$$

40. Não é possível encontrar A tal que

$$(1,1,1) \in \mathcal{L}(A) \quad \text{e} \quad (1,0,0) \in \mathcal{N}(A),$$

pois se $(1,0,0) \in \mathcal{N}(A)$ então a primeira entrada de todas as linhas de A é 0. Pelo que, nesse caso, não se pode ter $(1,1,1) \in \mathcal{L}(A)$.

41. Seja $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $\text{nul}\, A = 3$. Uma vez que

$$\text{n}^o \text{ de colunas de } A = \text{car}A + \text{nul}A,$$

então $\operatorname{car} A = 0$. Isto é, $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

42. Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que

$$\mathcal{C}(A) = \mathcal{N}(A).$$

Logo, o n^o de linhas de A é igual ao n^o de colunas de A. Isto é, $m = n$. Além disso, como

$$n = \operatorname{car} A + \operatorname{nul} A,$$

tem-se

$$n = 2 \dim \mathcal{N}(A).$$

Pelo que, $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ com n par. Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

43. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $\operatorname{car} A = n$. Logo, A é invertível. Isto é, existe A^{-1} tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Além disso, se A fôr tal que $A^2 = A$, então

$$A = AI = A(AA^{-1}) = (AA)A^{-1} = A^2A^{-1} = AA^{-1} = I.$$

Logo, $A = I$.

44. Sejam $\mathcal{B}_1 = \{(1,2),(0,1)\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{(1,1),(2,3)\}$ duas bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$. Seja $v = (1,5)$.

(i) Tem-se $v = (1,2) + 3(0,1)$. Logo, 1 e 3 são as coordenadas de v em relação à base $\mathcal{B}_1$.

(ii) Tem-se

$$S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $(1,2) = -(1,1) + (2,3)$ e $(0,1) = -2(1,1) + (2,3)$.

(iii) As coordenadas de $v = (1,5)$ em relação à base $\mathcal{B}_2$, são dadas por:

$$S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \end{bmatrix},$$

uma vez que 1 e 3 são as coordenadas de v em relação à base $\mathcal{B}_1$.

(iv) Tem-se $v = (1,5) = -7(1,1) + 4(2,3)$.

(v) Tem-se

$$S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $(1,1) = (1,2) - (0,1)$ e $(2,3) = 2(1,2) - (0,1)$.

Observação:

$$S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1} = \left(S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}\right)^{-1} \quad \text{e} \quad S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \left(S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1}\right)^{-1}.$$

(vi) As coordenadas de $v = (1,5)$ em relação à base $\mathcal{B}_1$, são dadas por:

$$S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1} \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

uma vez que -7 e 4 são as coordenadas de v em relação à base $\mathcal{B}_2$.

45. Sejam $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2\}$ duas bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$, onde

$$v_1 = (1,2), \quad v_2 = (0,1).$$

Seja

$$S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

a matriz de mudança da base $\mathcal{B}_2$ para a base $\mathcal{B}_1$. Determinemos $\mathcal{B}_2$.
Uma vez que

$$S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

então $w_1 = 2v_1 + v_2 = 2(1,2) + (0,1) = (2,5)$ e $w_2 = v_1 + v_2 = (1,2) + (0,1) = (1,3)$. Logo,

$$\mathcal{B}_2 = \{(2,5), (1,3)\}.$$

46. Sejam $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2\}$ duas bases ordenadas de $\mathcal{P}_1$, onde

$$w_1 = -1 + t, \quad w_2 = 1 + t.$$

Seja

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

a matriz de mudança da base $\mathcal{B}_1$ para a base $\mathcal{B}_2$. Determinemos $\mathcal{B}_1$.
Uma vez que

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

então $v_1 = 2\,(-1+t) - (1+t) = -3 + t$ e $v_2 = 3\,(-1+t) + 2\,(1+t) = -1 + 5t$. Logo,

$$\mathcal{B}_1 = \{-3 + t, -1 + 5t\}.$$

47. Sejam $\mathcal{B}_1 = \{1, 1-t, t^2\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{1, 1+t, 1+t+t^2\}$ duas bases ordenadas de $\mathcal{P}_2$.

(i) Sejam $1, 2$ e 3 as coordenadas de um vector $p(t) \in \mathcal{P}_2$ em relação à base $\mathcal{B}_2$. Determinemos as coordenadas do mesmo vector $p(t)$ em relação à base $\mathcal{B}_1$.

Tem-se

$$p(t) = 1 + 2\,(1+t) + 3\left(1+t+t^2\right) = 6 + 5t + 3t^2 = \alpha 1 + \beta\,(1-t) + \gamma t^2.$$

É fácil ver que $\alpha = 11,\;\; \beta = -5\;$ e $\;\gamma = 3$.

Resolução alternativa: Tem-se

$$S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $1 = 1 + 0\,(1-t) + 0t^2,\;\; 1+t = 2 - (1-t) + 0t^2\;$ e $\;1+t+t^2 = 2 - (1-t) + t^2$. Logo, as coordenadas de $p(t)$ em relação à base $\mathcal{B}_1$ são dadas por:

$$S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix},$$

onde $1, 2$ e 3 são as coordenadas de $p(t)$ em relação à base $\mathcal{B}_2$.

(ii) Determinemos a matriz $S_{B_1 \to B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2.

Como

$$1 = 1 \times 1 + 0\,(1+t) + 0\,(1+t+t^2)$$

$$1-t = 2 \times 1 - (1+t) + 0\,(1+t+t^2)$$

$$t^2 = 0 \times 1 - (1+t) + (1+t+t^2)$$

então

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Além disso, bastaria ver que

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \left(S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, como

$$2 - t + t^2 = 1 + (1-t) + t^2$$

as coordenadas do vector $2 - t + t^2$ na base B_2 são dadas por

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ou seja

$$2 - t + t^2 = 3 - 2\,(1+t) + \left(1 + t + t^2\right).$$

48. Sejam $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2\}$ duas bases ordenadas de $\mathcal{P}_1$, onde

$$w_1 = t, \quad w_2 = 1 - t.$$

Seja

$$S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

a matriz de mudança da base $\mathcal{B}_2$ para a base $\mathcal{B}_1$. Determinemos $\mathcal{B}_1$.

Uma vez que

$$S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

então $w_1 = 2v_1 - v_2$ e $w_2 = 3v_1 + 2v_2$. Isto é, tem-se o sistema

$$\begin{cases} 2v_1 - v_2 = t \\ \\ 3v_1 + 2v_2 = 1 - t, \end{cases}$$

cuja matriz aumentada é dada por

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & t \\ 3 & 2 & 1-t \end{array}\right].$$

Pelo método de eliminação de Gauss:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & t \\ 3 & 2 & 1-t \end{array}\right] \underset{-\frac{3}{2}L_1 + L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & t \\ 0 & \frac{7}{2} & 1 - \frac{5}{2}t \end{array}\right].$$

Logo, $v_2 = \frac{2}{7} - \frac{5}{7}t$ e $v_1 = \frac{1}{2}\,(v_2 + t) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7}t$. Logo,

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \frac{1}{7} + \frac{1}{7}t, \frac{2}{7} - \frac{5}{7}t \right\}.$$

49. Sejam $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ duas bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$, onde

$$v_1 = (1, 0, 1), \quad v_2 = (1, 1, 0), \quad v_3 = (0, 0, 1).$$

Seja

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

a matriz de mudança da base $\mathcal{B}_1$ para a base $\mathcal{B}_2$. Determinemos $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$. Uma vez que

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

então $v_1 = w_1 + 2w_2 - w_3$, $v_2 = w_1 + w_2 - w_3$ e $v_3 = 2w_1 + w_2 + w_3$. Isto é, tem-se o sistema

$$\begin{cases} w_1 + 2w_2 - w_3 = (1,0,1) \\ w_1 + w_2 - w_3 = (1,1,0) \\ 2w_1 + w_2 + w_3 = (0,0,1), \end{cases}$$

cuja matriz aumentada é dada por

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Pelo método de eliminação de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & (1,0,1) \\ 1 & 1 & -1 & (1,1,0) \\ 2 & 1 & 1 & (0,0,1) \end{array}\right] \underset{\substack{-L_1+L_2\to L_2 \\ -2L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & (1,0,1) \\ 0 & -1 & 0 & (0,1,-1) \\ 0 & -3 & 3 & (-2,0,-1) \end{array}\right] \underset{-3L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow}$$

$$\underset{-3L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & (1,0,1) \\ 0 & -1 & 0 & (0,1,-1) \\ 0 & 0 & 3 & (-2,-3,2) \end{array}\right].$$

Tem-se então o sistema

$$\begin{cases} w_1 + 2w_2 - w_3 = (1,0,1) \\ \\ -w_2 = (0,1,-1) \\ \\ 3w_3 = (-2,-3,2). \end{cases}$$

Logo, $w_3 = \left(-\frac{2}{3}, -1, \frac{2}{3}\right)$, $w_2 = (0,-1,1)$ e $w_1 = (1,0,1) - 2(0,-1,1) + \left(-\frac{2}{3}, -1, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, 1, -\frac{1}{3}\right)$.
Logo,

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \left(\frac{1}{3}, 1, -\frac{1}{3}\right), (0,-1,1), \left(-\frac{2}{3}, -1, \frac{2}{3}\right) \right\}.$$

Note que

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 1 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 1 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & -1 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

em que

$$S_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & -1 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

$$S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B}_1 = \{(1,0,1),(1,1,0),(0,0,1)\},$$
$$\mathcal{B}_2 = \left\{\left(\frac{1}{3},1,-\frac{1}{3}\right),(0,-1,1),\left(-\frac{2}{3},-1,\frac{2}{3}\right)\right\}.$$

50. Sejam
$$B_1 = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$
e
$$B_2 = \left\{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right\}$$
duas bases ordenadas de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Determinemos a matriz $S_{B_1\to B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2.

Queremos encontrar $a_1,a_2,a_3,a_4,b_1,b_2,b_3,b_4,c_1,c_2,c_3,c_4,d_1,d_2,d_3,d_4 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = a_1\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + a_3\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + a_4\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = b_1\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + b_2\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + b_3\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + b_4\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + c_4\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = d_1\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + d_2\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + d_3\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + d_4\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Atendendo a

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{L_1+L_2\to L_2 \\ L_1+L_3\to L_3 \\ L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2\leftrightarrow L_4}{\longrightarrow}$$

$$\underset{L_2\leftrightarrow L_4}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{-L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{L_3+L_4\to L_4}{\longrightarrow}$$

$$\underset{-L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Logo, tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = a_1\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + a_4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = b_1 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b_3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + b_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = d_1 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d_3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + d_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Isto é, tem-se os seguintes sistemas:

$$\begin{cases} 1 = -a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ 1 = 2a_2 + 2a_3 \\ 0 = -2a_3 + 2a_4 \\ 1 = 4a_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = -b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \\ 0 = 2b_2 + 2b_3 \\ 0 = -2b_3 + 2b_4 \\ 1 = 4b_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = -c_1 + c_2 + c_3 + c_4 \\ 0 = 2c_2 + 2c_3 \\ 1 = -2c_3 + 2c_4 \\ 1 = 4c_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = -d_1 + d_2 + d_3 + d_4 \\ 1 = 2d_2 + 2d_3 \\ -1 = -2d_3 + 2d_4 \\ -1 = 4d_4 \end{cases}$$

que são equivalentes a

$$\begin{cases} a_1 = -\frac{1}{4} \\ a_2 = \frac{1}{4} \\ a_3 = \frac{1}{4} \\ a_4 = \frac{1}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1 = \frac{1}{4} \\ b_2 = -\frac{1}{4} \\ b_3 = \frac{1}{4} \\ b_4 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = \frac{1}{4} \\ c_2 = \frac{1}{4} \\ c_3 = -\frac{1}{4} \\ c_4 = \frac{1}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} d_1 = \frac{1}{4} \\ d_2 = \frac{1}{4} \\ d_3 = \frac{1}{4} \\ d_4 = -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

Logo, a matriz $S_{B_1 \to B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2 é dada por:

$$S_{B_1 \to B_2} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Assim, as coordenadas do vector $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ em relação à base B_2 são dadas por

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Isto é,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

51. Seja $B = \{v_1, v_2\}$ uma base ordenada de $\mathcal{P}_1$. Sejam $(1, -1)$ e $(2, 2)$ respectivamente as coordenadas de dois polinómios $1 + t$ e $1 - t$ em relação à base B. Determine B.

Tem-se

$$\begin{cases} 1 + t = v_1 - v_2 \\ 1 - t = 2v_1 + 2v_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 + t \\ 1 - t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 + t \\ 1 - t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} + \frac{1}{4}t \\ -\frac{1}{4} - \frac{3}{4}t \end{bmatrix}.$$

Logo $B = \left\{ \frac{3}{4} + \frac{1}{4}t, -\frac{1}{4} - \frac{3}{4}t \right\}$.

52. Sejam $B_1 = \{v_1, v_2\}$ e $B_2 = \{w_1, w_2\}$ duas bases ordenadas de $\mathcal{P}_1$. Suponha que $(1, -1)$ e $(2, 2)$ são respectivamente as coordenadas de um polinómio $p(t)$ em relação às bases B_1 e B_2. Suponha ainda que $(1, 1)$ e $(2, -2)$ são respectivamente as coordenadas de um polinómio $q(t)$ em relação às bases B_1 e B_2. Determine a matriz $S_{B_1 \to B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2.

Seja

$$S_{B_1 \to B_2} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Tem-se

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$\begin{cases} 2 = a - b \\ 2 = c - d \\ 2 = a + b \\ -2 = c + d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{e assim} \quad S_{B_1 \to B_2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

53. a)

$$Au - \lambda u = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda = 4.$$

b) $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = L(\{(1,0,-1)\}).$

$\{(1,0,-1)\}$ é base de $\mathcal{N}(A)$.

c) $Au = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} \Leftrightarrow Au = 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \underset{\textbf{a) e b)}}{\Leftrightarrow} u = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ com $\alpha \in \mathbb{R}$.

d) A equação $Au = b$ tem sempre solução se e só se $b \in \mathcal{C}(A) = L(\{(1,0,1),(0,1,0)\})$.

54. a) Como

$$1 - t^2 = t - t^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-2+2t),$$

as coordenadas de $1 - t^2$ na base $\mathcal{B}$ são 1 e $-\frac{1}{2}$.

b) $\mathcal{B}_1 = \left\{1(t-t^2) + 0(-2+2t), 1(t-t^2) + \left(-\frac{1}{2}\right)(-2+2t)\right\} = \{t - t^2, 1 - t^2\}$.

c)

$$V \underset{3-t \in V}{=} L\left(\{-1+t^2, -2+t-t^2\}\right).$$

Como

$$-1 + t^2 \in U \qquad \text{e} \qquad -2 + t - t^2 \notin U,$$

tem-se

$$U + V = \mathcal{P}_2$$

e assim $\{-1 + t^2\}$ é uma base para $U \cap V$.

55. a)

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & \alpha & 0 & -1 \\ \alpha & -1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & \alpha & 0 & -\alpha \end{bmatrix} \underset{\substack{\alpha L_1 + L_2 \to L_2 \\ -L_1 + L_4 \to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & \alpha & 0 & -1 \\ 0 & \alpha^2 - 1 & -\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\alpha \end{bmatrix}.$$

$$\operatorname{car} A_\alpha = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad \alpha = 1 \\ 3 & \text{se} \quad \alpha = -1 \\ 4 & \text{se} \quad \alpha \neq 1 \text{ e } \alpha \neq -1. \end{cases}$$

$$\mathcal{N}\left(A_{-1}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(1,-1,0,0)\}\right).$$

$\{(1,-1,0,0)\}$ é uma base para $\mathcal{N}\left(A_{-1}\right)$.

b) Por a),

$$\mathcal{B} = \{(-1,-1,0,-1), (0,1,1,0), (-1,0,1,1)\}$$

é linearmente independente e gera $\mathcal{C}\left(A_{-1}\right)$, pelo que $\mathcal{B}$ é uma base para $\mathcal{C}\left(A_{-1}\right)$. Como

$$(0,0,0,1) = -\frac{1}{2}(-1,-1,0,-1) - \frac{1}{2}(0,1,1,0) + \frac{1}{2}(-1,0,1,1)$$

então $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ são as coordenadas de $(0,0,0,1)$ na base ordenada $\mathcal{B}$.

c)

$$A_0 u = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow u = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{solução particular de } A_0 u = b} + v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

com

$$v \in \mathcal{N}\left(A_0\right) \underset{A_0 \text{ é invertível}}{=} \{\mathbf{0}\}.$$

Solução geral de $A_0 u = b : \{(1,0,0,0)\}$.

d) $\{(-1,1,0,-1), (0,0,1,1)\}$ é uma base de $\mathcal{L}\left(A_1\right)$ e $\{(-1,1,0,-1), (0,-1,1,0)\}$ é uma base de $\mathcal{C}\left(A_1\right)$.

Como

$$\mathcal{B}' = \{(-1,1,0,-1), (0,-1,1,0), (0,0,1,1)\}$$

é linearmente independente e gera $\mathcal{L}\left(A_1\right) + \mathcal{C}\left(A_1\right)$ então $\mathcal{B}'$ é uma base de $\mathcal{L}\left(A_1\right) + \mathcal{C}\left(A_1\right)$.

e) Por a) e b),

$$\{(-1,-1,0,-1), (0,0,1,1), (0,0,0,1)\}$$

é uma base de $\mathcal{L}\left(A_{-1}\right)$ e

$$\{(-1,-1,0,-1), (0,1,1,0), (-1,0,1,1)\}$$

é uma base de $\mathcal{C}(A_{-1})$. Como por f)

$$(0,0,0,1) \in \mathcal{C}(A_{-1}) \qquad \text{e} \qquad (0,0,1,1) \notin \mathcal{C}(A_{-1})$$

então $\{(-1,-1,0,-1),(0,0,0,1)\}$ é uma base $\mathcal{L}(A_1) \cap \mathcal{C}(A_1)$.

56. Usando o método de eliminação de Gauss, tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1+L_2 \to L_2 \\ -L_1+L_3 \to L_3 \\ L_1+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (*).$$

a) Atendendo a (*) $\dim \mathcal{N}(A) = 4 - \dim \mathcal{C}(A) = 4 - \operatorname{car} A = 4 - 1 = 3$.

b) $\{(1,0,0,0)\}$ não é base de $\mathcal{C}(A)$ uma vez que $(1,0,0,0) \notin \mathcal{C}(A)$. Uma base de $\mathcal{C}(A)$ é por exemplo $\{(1,-1,1,-1)\}$ e $(1,0,0,0) \notin L\{(1,-1,1,-1)\}$.

57. a)

$$\begin{aligned} U &= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \ x+y+z+w=0\} = \\ &= \{(-y-z-w,y,z,w) : y,z,w \in \mathbb{R}\} = \\ &= L\left(\{(-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)\}\right). \end{aligned}$$

O conjunto

$$\{(-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)\}$$

é uma base para U, uma vez que gera U e, é também linearmente independente.

b) Atendendo a que

$$U = L\left(\{(1,-1,-1,1),(-1,0,0,1),(-1,1,0,0),(-1,0,1,0)\}\right)$$

e

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

então

$$\{(1,-1,-1,1),(-1,0,0,1),(-1,1,0,0)\}$$

é uma base para U, uma vez que gera U e, é também linearmente independente.

58. Como 1 e 2 são as coordenadas de $(1,1)$ em $\mathcal{B}_1$ pois

$$(1,1) = 1(1,-1) + 2(0,1),$$

e sendo

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a matriz de mudança da base $\mathcal{B}_1$ para a base $\mathcal{B}_2$, então as coordenadas de $(1,1)$ em $\mathcal{B}_2$ são -1 e 2 uma vez que

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

59. Como

$$p(-1) = 2p(0) - p(1) \Leftrightarrow a_0 - a_1 + a_2 = 2a_0 - (a_0 + a_1 + a_2) \Leftrightarrow a_2 = 0$$

então

$$V_1 = \{p(t) \in \mathcal{P}_2 : \; p(-1) = 2p(0) - p(1)\} = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_2 = 0\}.$$

Por outro lado, atendendo a

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & a_0 \\ 1 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & a_2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & a_0 \\ 0 & 1 & a_0 + a_1 \\ 0 & 0 & a_0 + a_1 + a_2 \end{array}\right]$$

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in V_2 = L(\{-1 + t, 1 - t^2\}) \Leftrightarrow a_0 + a_1 + a_2 = 0.$$

Logo

$$V_2 = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0 + a_1 + a_2 = 0\}.$$

Pelo que

$$\begin{aligned} V_1 \cap V_2 &= \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0 + a_1 + a_2 = 0 \; e \; a_2 = 0\} = \\ &= \{-a_1 + a_1 t : a_1 \in \mathbb{R}\} = L(\{-1 + t\}). \end{aligned}$$

Como $\{-1 + t\}$ gera $V_1 \cap V_2$ e, é também linearmente independente, então é uma base para $V_1 \cap V_2$.

60. Usando o método de eliminação de Gauss, tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{-L_1 + L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{-L_2 + L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a)

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = 0 \quad \text{e} \quad y - z = 0\} = \\ &= \{(-z, z, z) : z \in \mathbb{R}\} = L(\{(-1,1,1)\}). \end{aligned}$$

Logo $\{(-1,1,1)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(A)$ uma vez que gera $\mathcal{N}(A)$ e é linearmente independente.

b)
$$\mathcal{C}(A) = L(\{(1,0,1),(0,1,1)\}).$$
Logo, sendo o conjunto
$$S = \{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,1)\}(\subset \mathbb{R}^3)$$
linearmente independente e tendo em conta que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ então S é uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclui duas colunas de A.

c)
$$\mathcal{L}(A) = L(\{(1,0,1),(0,1,-1)\}).$$
Uma vez que $\{(1,0,1),(0,1,1)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A)$ e $\{(1,0,1),(0,1,-1)\}$ é uma base de $\mathcal{L}(A)$ então
$$\dim \mathcal{L}(A) = \dim \mathcal{L}(A) = \operatorname{car} A = 2.$$
Atendendo a que
$$(1,0,1) \in \mathcal{L}(A) \cap \mathcal{C}(A) \qquad \text{e} \qquad (0,1,-1) \notin \mathcal{C}(A)$$
(uma vez que o "sistema"
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \underset{-L_1+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \underset{-L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$
é impossível) então $\{(1,0,1)\}$ é uma base de $\mathcal{L}(A) \cap \mathcal{C}(A)$, tendo-se $\dim \mathcal{L}(A) \cap \mathcal{C}(A) = 1$.

61. Como $\mathcal{B} = \{2-t, 2+t\}$ é uma base de $\mathcal{P}_1$, existem escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que
$$p(t) = t = \alpha(2-t) + \beta(2+t)$$
sendo α e β as coordenadas de $p(t)$ nessa base ordenada. Atendendo a que
$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{\frac{1}{2}L_1+L_2\to L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right],$$
$$2\beta = 1 \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{2}\; e 2\alpha + 2\beta = 0 \underset{\beta=\frac{1}{2}}{\Leftrightarrow} \alpha = -\frac{1}{2}.$$
Logo $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ são as coordenadas de $p(t)$ em $\mathcal{B}$.

62. Seja
$$B = \begin{bmatrix} 4 & a & b \\ c & d & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

tal que
$$\dim \mathcal{N}(B) = 2 \qquad \text{e} \qquad (1,0,2) \in \mathcal{L}(B).$$
Como
$$\operatorname{car} B = \dim \mathcal{L}(B) = 3 - \dim \mathcal{N}(B) = 1$$
então
$$\mathcal{L}(B) = L(\{(c,d,4)\}) = L(\{(4,a,b)\}) = L(\{(1,0,2)\}),$$
pelo que $a = d = 0$, $b = 8$ e $c = 2$.

63. Seja U o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por $\{(1,1,0,-1),(1,1,0,1)\}$. Seja $S = \{(1,0,0,2)\} + U$ e considere ainda o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^4$
$$V = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : y = w\right\}.$$

a)
$$S = \{(1,0,0,2)\} + U = \{(1+s+t, s+t, 0, 2-s+t) : s,t \in \mathbb{R}\}.$$
Sejam $x = 1+s+t$, $\quad y = s+t$, $\;z = 0$, $\;w = 2-s+t$. Tem-se então o seguinte sistema linear (com 4 variáveis) não homogéneo
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

b) Seja $(x,y,z,w) \in U$. Existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que
$$(x,y,z,w) = \alpha(1,1,0,-1) + \beta(1,1,0,1). \qquad (*)$$
Por outro lado, atendendo a
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & z \\ -1 & 1 & w \end{array}\right] \underset{\substack{-L_1+L_2 \to L_2 \\ L_1+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & y-x \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 2 & x+w \end{array}\right]$$
para que a equação (*) tenha solução é preciso que: $y - x = 0$ e $z = 0$, ou seja $(x,y,z,w) \in \mathcal{N}(A)$, com
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
Reciprocamente, se $(x,y,z,w) \in \mathcal{N}(A)$ então $(x,y,z,w) \in U$. Logo $U = \mathcal{N}(A)$.

c) Uma base para $\mathbb{R}^4$ que inclui dois vectores de U:
$$\{(1,1,0,-1),(1,1,0,1),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}$$
Note-se que $(1,1,0,-1),(1,1,0,1) \in U$ e que 4 vectores de $\mathbb{R}^4$ linearmente independentes, formam uma base de $\mathbb{R}^4$.

d) Seja $\mathcal{B} = \{(2,2,0,0),(1,1,0,1)\}$ uma base ordenada de U.
Tem-se

$$(1,1,0,-7) = 4(2,2,0,0) - 7\,(1,1,0,1)\,.$$

Logo, 4 e -7 são as coordenadas de $(1,1,0,-7)$ em relação à base $\mathcal{B}$

e) Determine uma base para $U+V$ e uma base para $U\cap V$, indicando as respectivas dimensões.

Tem-se (em $\mathbb{R}^4$) $U = L\left(\{(1,1,0,-1),(1,1,0,1)\}\right)$ e

$$V = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : y = w\right\} = L\left(\{(1,0,0,0),(0,1,0,1)\,,(0,0,1,0)\}\right).$$

Como $(1,1,0,-1) \notin V$ e $(1,1,0,1) \in V$, então

$$\{(1,1,0,-1),(1,0,0,0),(0,1,0,1)\,,(0,0,1,0)\}$$

é uma base de $U+V$, tendo-se $\dim(U+V) = 4$, pelo que $U+V = \mathbb{R}^4$.
Além disso, como $U = L\left(\{(1,1,0,-1),(1,1,0,1)\}\right)$ e

$$(1,1,0,-1) \notin V, \quad (1,1,0,1) \in V$$

então $\{(1,1,0,1)\}$ é uma base de $U\cap V$, tendo-se $\dim(U\cap V) = 1$. De facto

$$\underbrace{\dim(U\cap V)}_{=1} = \underbrace{\dim U}_{=2} + \underbrace{\dim V}_{=3} - \underbrace{\dim(U+V)}_{=4}.$$