Instituto Superior Técnico - Álgebra Linear - 1^o Semestre 2011/2012

LEAN - LEMat - MEAmbi - MEBiol - MEQ

Resolução da 4^a Ficha de exercícios

1. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. A aplicação $T_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T_{a,b}(x) = ax + b$ é linear se e só se $b = 0$ e $a \in \mathbb{R}$.

2. (i) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x, y) = (x + 2y, 3x - y)$. T é linear e tem-se

$$M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1, 0) = (1, 3)$ e $T(0, 1) = (2, -1)$. Tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(T) &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T(x, y) = (0, 0)\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 2y, 3x - y) = (0, 0)\right\} = \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -2y \text{ e } 3x = y\right\} = \{(0, 0)\}. \end{aligned}$$

Logo T é injectiva e $\dim \mathcal{N}(T) = 0$. Uma vez que

$$\dim \underbrace{\mathbb{R}^2}_{\text{espaço de partida}} = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T),$$

então $\dim \mathcal{I}(T) = 2$. Vejamos como encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$. Tem-se

$$\mathcal{I}(T) = \{(x + 2y, 3x - y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 3) + y(2, -1) : x, y \in \mathbb{R}\} = L(\{(1, 3), (2, -1)\}).$$

Como o conjunto $\{(1, 3), (2, -1)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{I}(T)$ então $\{(1, 3), (2, -1)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

Por outro lado, como $\mathcal{I}(T)$ é subespaço de $\mathbb{R}^2$ e $\dim \mathcal{I}(T) = \dim \mathbb{R}^2$ então $\mathcal{I}(T) = \mathbb{R}^2$, isto é, T é sobrejectiva. Sendo T sobrejectiva e tendo-se dim (espaço de partida) = dim (espaço de chegada) então T também é injectiva, como se constatou no facto de se ter $\mathcal{N}(T) = \{(0, 0)\}$.

Como T é injectiva e sobrejectiva, então T é bijectiva.

Observação: T é injectiva se e só se $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$, onde $\mathbf{0}$ é o vector nulo do espaço de partida.

Resolução alternativa para encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$. Sendo

$$M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix},$$

a matriz que representa a transformação linear T em relação à base canónica $\mathcal{B}_c^2$ no espaço de partida e no espaço de chegada, tem-se

$$T(x, y) = M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}\left(M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2)\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}\right) = \{(0, 0)\}$$

e

$$\mathcal{I}(T) = \mathcal{C}\left(M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\right) = \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(1,3),(2,-1)\}\right).$$

O conjunto $\{(1,3),(2,-1)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

(ii) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x,y) = (1-y, 2x)$. T não é linear pois $T(0,0) = (1,0) \neq (0,0)$.

(iii) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $T(x,y,z) = (x, 2x, -x)$. T é linear e tem-se

$$M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1,0,0) = (1,2,-1)$, $T(0,1,0) = (0,0,0)$ e $T(0,0,1) = (0,0,0)$. Tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(T) &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (0,0,0)\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,2x,-x) = (0,0,0)\right\} = \\ &= \left\{(0,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y,z \in \mathbb{R}\right\} = \left\{y(0,1,0) + z(0,0,1) \in \mathbb{R}^3 : y,z \in \mathbb{R}\right\} = \\ &= L\left(\{(0,1,0),(0,0,1)\}\right). \end{aligned}$$

Como o conjunto $\{(0,1,0),(0,0,1)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{N}(T)$ então

$$\{(0,1,0),(0,0,1)\}$$

é uma base de $\mathcal{N}(T)$. Logo, $\dim \mathcal{N}(T) = 2$. Uma vez que

$$\dim \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{espaço de partida}} = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T),$$

então $\dim \mathcal{I}(T) = 1$. Vejamos como encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$. Tem-se

$$\mathcal{I}(T) = \{(x,2x,-x) : x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,2,-1) : x \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(1,2,-1)\}\right).$$

Como o conjunto $\{(1,2,-1)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{I}(T)$ então $\{(1,2,-1)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

Por outro lado, como $\mathcal{I}(T) \neq \mathbb{R}^3$ então T não é sobrejectiva. Como $\mathcal{N}(T) \neq \{(0,0,0)\}$ então T não é injectiva.

Resolução alternativa para encontrar bases para $\mathcal{N}(T)$ e $\mathcal{I}(T)$. Sendo

$$M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

a matriz que representa a transformação linear T em relação à base canónica $\mathcal{B}_c^3$ no espaço de partida e no espaço de chegada, tem-se

$$T(x,y,z) = M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\mathcal{N}(T)=\mathcal{N}\left(M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)\right)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}1&0&0\\2&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix}\right)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\right)=L\left(\{(0,1,0),(0,0,1)\}\right)$$

e

$$\mathcal{I}(T)=\mathcal{C}\left(M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)\right)=\mathcal{C}\left(\begin{bmatrix}1&0&0\\2&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix}\right)=L\left(\{(1,2,-1)\}\right).$$

O conjunto $\{(0,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$ e o conjunto $\{(1,2,-1)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

(iv) Seja $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ com $T(x,y,z)=(0,0)$. T é linear e tem-se

$$M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2)=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1,0,0)=T(0,1,0)=T(0,0,1)=(0,0)$. Tem-se

$$\mathcal{N}(T)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:T(x,y,z)=(0,0)\right\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x,y,z\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}^3.$$

Uma base para $\mathcal{N}(T)$ poderá ser a base canónica $\mathcal{B}_c^3$. Logo, $\dim\mathcal{N}(T)=3$. Uma vez que

$$\dim\underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{espaço de partida}}=\dim\mathcal{N}(T)+\dim\mathcal{I}(T),$$

então $\dim\mathcal{I}(T)=0$. De facto

$$\mathcal{I}(T)=\{(0,0)\}.$$

Por outro lado, como $\mathcal{I}(T)\neq\mathbb{R}^2$ então T não é sobrejectiva. Como $\mathcal{N}(T)\neq\{(0,0,0)\}$ então T não é injectiva.

Resolução alternativa para encontrar uma base para $\mathcal{N}(T)$. Sendo

$$M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2)=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

a matriz que representa a transformação linear T em relação às bases canónicas $\mathcal{B}_c^3$ e $\mathcal{B}_c^2$ nos espaços de partida e de chegada respectivamente, tem-se

$$T(x,y,z)=M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\mathcal{N}(T)=\mathcal{N}\left(M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2)\right)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\right)=\mathbb{R}^3=L\left(\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}\right)$$

e

$$\mathcal{I}(T)=\mathcal{C}\left(M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2)\right)=\mathcal{C}\left(\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\right)=\{(0,0)\}.$$

Uma base para $\mathcal{N}(T)$ poderá ser a base canónica $\mathcal{B}_c^3$.

(v) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ com $T(x, y) = -3x$. T é linear e tem-se

$$M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c) = \begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1, 0) = -3$ e $T(0, 1) = 0$. Note que $\mathcal{B}_c = \{1\}$ é a base canónica de $\mathbb{R}$. Tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(T) &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T(x, y) = 0\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -3x = 0\right\} = \\ &= \left\{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\right\} = \left\{y(0, 1) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\right\} = L\left(\{(0, 1)\}\right). \end{aligned}$$

Como o conjunto $\{(0, 1)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{N}(T)$ então $\{(0, 1)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$. Logo, $\dim \mathcal{N}(T) = 1$. Uma vez que

$$\dim \underbrace{\mathbb{R}^2}_{\text{espaço de partida}} = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T),$$

então $\dim \mathcal{I}(T) = 1$. Vejamos como encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$. Tem-se

$$\mathcal{I}(T) = \{-3x : x \in \mathbb{R}\} = L\left(\{1\}\right).$$

Como o conjunto $\{1\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{I}(T)$ então $\{1\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$, a base canónica de $\mathbb{R}$.

Por outro lado, como $\mathcal{I}(T)$ é subespaço de $\mathbb{R}$ e $\dim \mathcal{I}(T) = \dim \mathbb{R}$ então $\mathcal{I}(T) = \mathbb{R}$, isto é, T é sobrejectiva. Como $\mathcal{N}(T) \neq \{(0, 0)\}$ então T não é injectiva.

Resolução alternativa para encontrar bases para $\mathcal{N}(T)$ e $\mathcal{I}(T)$. Sendo

$$M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c) = \begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix},$$

a matriz que representa a transformação linear T em relação às bases canónicas $\mathcal{B}_c^2$ no espaço de partida e $\mathcal{B}_c$ no espaço de chegada, tem-se

$$T(x, y) = M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}\left(M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c)\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(0, 1)\}\right)$$

e

$$\mathcal{I}(T) = \mathcal{C}\left(M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c)\right) = \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{-3\}\right) = L\left(\{1\}\right).$$

O conjunto $\{(0, 1)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$ e o conjunto $\{1\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

(vi) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $T(x, y, z) = (0, -1, 2)$. T não é linear pois $T(0, 0, 0) = (0, -1, 2) \neq (0, 0, 0)$.

(vii) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ com $T(x) = (2x, 0, -x)$. T é linear e tem-se

$$M(T; \mathcal{B}_c; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1) = (2, 0, -1)$. Tem-se

$$\mathcal{N}(T) = \{x \in \mathbb{R} : T(x) = (0,0,0)\} = \{x \in \mathbb{R} : (2x, 0, -x) = (0,0,0)\} = \{0\}.$$

Logo, $\dim \mathcal{N}(T) = 0$. Uma vez que

$$\dim \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{espaço de partida}} = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T),$$

então $\dim \mathcal{I}(T) = 1$. Vejamos como encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$. Tem-se

$$\mathcal{I}(T) = \{(2x, 0, -x) : x \in \mathbb{R}\} = \{x(2, 0, -1) : x \in \mathbb{R}\} = L(\{(2, 0, -1)\}).$$

Como o conjunto $\{(2, 0, -1)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{I}(T)$ então $\{(2, 0, -1)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

Por outro lado, como $\mathcal{I}(T) \neq \mathbb{R}^3$ então T não é sobrejectiva. Como $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ então T é injectiva.

Resolução alternativa para encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$. Sendo

$$M(T; \mathcal{B}_c; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

a matriz que representa a transformação linear T em relação às bases canónicas $\mathcal{B}_c$ no espaço de partida e $\mathcal{B}_c^3$ no espaço de chegada, tem-se

$$T(x) = M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)\,[x].$$

Logo,

$$\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}\left(M(T; \mathcal{B}_c; \mathcal{B}_c^3)\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = L(\{0\}) = \{0\}$$

e

$$\mathcal{I}(T) = \mathcal{C}\left(M(T; \mathcal{B}_c; \mathcal{B}_c^3)\right) = \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = L(\{(2, 0, -1)\}).$$

O conjunto $\{(2, 0, -1)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

(viii) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x, y, z) = (x^2 - y, 2y)$. T não é linear, pois por exemplo:

$$T((1, 0, 0) + (1, 0, 0)) = T(2, 0, 0) = (4, 0) \neq (2, 0) = T(1, 0, 0) + T(1, 0, 0).$$

(ix) Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x, y, z, w) = (x - y, 3w)$. T é linear e tem-se

$$M(T; \mathcal{B}_c^4; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1,0,0,0) = (1,0)$, $T(0,1,0,0) = (-1,0)$, $T(0,0,1,0) = (0,0)$ e $T(0,0,0,1) = (0,3)$. Tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(T) &= \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : T(x,y,z,w) = (0,0)\right\} = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : (x-y, 3w) = (0,0)\right\} = \\ &= \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x = y \;\text{ e }\; w = 0\right\} = \left\{(y,y,z,0) \in \mathbb{R}^4 : y,z \in \mathbb{R}\right\} = \\ &= \left\{y(1,1,0,0) + z(0,0,1,0) \in \mathbb{R}^4 : y,z \in \mathbb{R}\right\} = L\left(\{(1,1,0,0),(0,0,1,0)\}\right).\end{aligned}$$

Como o conjunto $\{(1,1,0,0),(0,0,1,0)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{N}(T)$ então $\{(1,1,0,0),(0,0,1,0)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$. Logo, $\dim \mathcal{N}(T) = 2$. Uma vez que

$$\dim \underbrace{\mathbb{R}^4}_{\text{espaço de partida}} = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T),$$

então $\dim \mathcal{I}(T) = 2$. Vejamos como encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$. Tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(T) &= \{(x-y,3w) : x,y,w \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0) + y(-1,0) + w(0,3) : x,y,w \in \mathbb{R}\} = \\ &= L\left(\{(1,0),(-1,0),(0,3)\}\right).\end{aligned}$$

Como o conjunto $\{(1,0),(0,3)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{I}(T)$ então $\{(1,0),(0,3)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

Por outro lado, como $\mathcal{I}(T)$ é subespaço de $\mathbb{R}^2$ e $\dim \mathcal{I}(T) = \dim \mathbb{R}^2$ então $\mathcal{I}(T) = \mathbb{R}^2$, isto é, T é sobrejectiva. Como $\mathcal{N}(T) \neq \{(0,0,0,0)\}$ então T não é injectiva.

Resolução alternativa para encontrar bases para $\mathcal{N}(T)$ e $\mathcal{I}(T)$. Sendo

$$M(T;\mathcal{B}_c^4;\mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

a matriz que representa a transformação linear T em relação às bases canónicas $\mathcal{B}_c^4$ no espaço de partida e $\mathcal{B}_c^2$ no espaço de chegada, tem-se

$$T(x,y,z,w) = M(T;\mathcal{B}_c^4;\mathcal{B}_c^2)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}\left(M(T;\mathcal{B}_c^4;\mathcal{B}_c^2)\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(1,1,0,0),(0,0,1,0)\}\right)$$

e

$$\mathcal{I}(T) = \mathcal{C}\left(M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\right) = \mathcal{C}\left(\left[\left[\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right]\right]\right) = L\left(\{(1,0),(0,3)\}\right).$$

O conjunto $\{(1,1,0,0),(0,0,1,0)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$ e o conjunto $\{(1,0),(0,3)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

(x) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ com $T(x,y,z) = (-z, y-2z, 2y, y+z)$. T é linear e tem-se

$$M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1,0,0)=(0,0,0)$, $T(0,1,0)=(0,1,2,1)$ e $T(0,0,1)=(-1,-2,0,1)$. Tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(T) &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : T(x,y,z)=(0,0,0,0)\right\} = \\ &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (-z,y-2z,2y,y+z)=(0,0,0,0)\right\} = \\ &= \left\{(x,0,0)\in\mathbb{R}^3 : x\in\mathbb{R}\right\} = L\left(\{(1,0,0)\}\right).\end{aligned}$$

Como o conjunto $\{(1,0,0)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{N}(T)$ então $\{(1,0,0)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$. Logo, $\dim\mathcal{N}(T)=1$. Uma vez que

$$\dim \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{espaço de partida}} = \dim\mathcal{N}(T)+\dim\mathcal{I}(T),$$

então $\dim\mathcal{I}(T)=2$. Vejamos como encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$. Tem-se

$$\mathcal{I}(T)=\{(-z,y-2z,2y,y+z) : y,z\in\mathbb{R}\}=L\left(\{(0,1,2,1),(-1,-2,0,1)\}\right).$$

Como o conjunto $\{(0,1,2,1),(-1,-2,0,1)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{I}(T)$ então $\{(0,1,2,1),(-1,-2,0,1)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

Por outro lado, como $\mathcal{I}(T)\neq\mathbb{R}^4$ então T não é sobrejectiva. Como $\mathcal{N}(T)\neq\{(0,0,0)\}$ então T não é injectiva.

Resolução alternativa para encontrar bases para $\mathcal{N}(T)$ e $\mathcal{I}(T)$. Sendo

$$M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^4)=\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&1&-2\\0&2&0\\0&1&1\end{bmatrix},$$

a matriz que representa a transformação linear T em relação à base canónica $\mathcal{B}_c^3$ no espaço de partida e no espaço de chegada, tem-se

$$T(x,y,z)=M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^4)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(T) &= \mathcal{N}\left(M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^4)\right)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&1&-2\\0&2&0\\0&1&1\end{bmatrix}\right)= \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\0&2&0\\0&1&0\end{bmatrix}\right)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\right)=L\left(\{(1,0,0)\}\right)\end{aligned}$$

e

$$\mathcal{I}(T)=\mathcal{C}\left(M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^4)\right)=\mathcal{C}\left(\left[\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&1&-2\\0&2&0\\0&1&1\end{bmatrix}\right]\right)=L\left(\{(0,1,2,1),(-1,-2,0,1)\}\right).$$

O conjunto $\{(1,0,0)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$ e o conjunto $\{(0,1,2,1),(-1,-2,0,1)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

(xi) Seja $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ com $T(x)=(0,0)$. T é linear e tem-se

$$M(T;\mathcal{B}_c;\mathcal{B}_c^2)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1)=(0,0)$. Tem-se

$$\mathcal{N}(T)=\{x\in\mathbb{R}:T(x)=(0,0)\}=\{x:x\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}.$$

Uma base para $\mathcal{N}(T)$ poderá ser a base canónica $\mathcal{B}_c=\{1\}$. Logo, $\dim\mathcal{N}(T)=1$. Uma vez que

$$\dim\underbrace{\mathbb{R}}_{\text{espaço de partida}}=\dim\mathcal{N}(T)+\dim\mathcal{I}(T),$$

então $\dim\mathcal{I}(T)=0$. De facto

$$\mathcal{I}(T)=\{(0,0)\}.$$

Por outro lado, como $\mathcal{I}(T)\neq\mathbb{R}^2$ então T não é sobrejectiva. Como $\mathcal{N}(T)\neq\{0\}$ então T não é injectiva.

Resolução alternativa para encontrar uma base para $\mathcal{N}(T)$. Sendo

$$M(T;\mathcal{B}_c;\mathcal{B}_c^2)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},$$

a matriz que representa a transformação linear T em relação às bases canónicas $\mathcal{B}_c$ e $\mathcal{B}_c^2$ nos espaços de partida e de chegada respectivamente, tem-se

$$T(x)=M(T;\mathcal{B}_c;\mathcal{B}_c^2)\begin{bmatrix}x\end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\mathcal{N}(T)=\mathcal{N}\left(M(T;\mathcal{B}_c;\mathcal{B}_c^2)\right)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right)=\mathbb{R}=L(\{1\})$$

e

$$\mathcal{I}(T)=\mathcal{C}\left(M(T;\mathcal{B}_c;\mathcal{B}_c^2)\right)=\mathcal{C}\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right)=\{(0,0)\}.$$

Uma base para $\mathcal{N}(T)$ poderá ser a base canónica $\mathcal{B}_c=\{1\}$.

(xii) Seja $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ com $T(x,y,z)=(x+2y,3z,x-z)$. T é linear e tem-se

$$M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&3\\1&0&-1\end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1,0,0)=(1,0,1)$, $T(0,1,0)=(2,0,0)$ e $T(0,0,1)=(0,3,-1)$. Tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(T)&=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:T(x,y,z)=(0,0,0)\right\}=\\&=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x+2y,3z,x-z)=(0,0,0)\right\}=\\&=\{(0,0,0)\}.\end{aligned}$$

Logo, $\dim \mathcal{N}(T) = 0$ e T é injectiva. Uma vez que

$$\dim \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{espaço de partida}} = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T),$$

então $\dim \mathcal{I}(T) = 3$. Vejamos como encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$. Tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(T) &= \{(x+2y, 3z, x-z) : x, y, z \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{x(1,0,1) + y(2,0,0) + z(0,3,-1) : x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= L\left(\{(1,0,1), (2,0,0), (0,3,-1)\}\right).\end{aligned}$$

Como o conjunto $\{(1,0,1), (2,0,0), (0,3,-1)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{I}(T)$ então $\{(1,0,1), (2,0,0), (0,3,-1)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

Por outro lado, como $\mathcal{I}(T)$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$ e $\dim \mathcal{I}(T) = \dim \mathbb{R}^3$ então $\mathcal{I}(T) = \mathbb{R}^3$, isto é, T é sobrejectiva.

Como T é injectiva e sobrejectiva, então T é bijectiva.

Resolução alternativa para encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$. Sendo

$$M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

a matriz que representa a transformação linear T em relação à base canónica $\mathcal{B}_c^3$ no espaço de partida e no espaço de chegada, tem-se

$$T(x, y, z) = M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(T) &= \mathcal{N}\left(M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right) = \{(0,0,0)\}\end{aligned}$$

e

$$\mathcal{I}(T) = \mathcal{C}\left(M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)\right) = \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(1,0,1), (2,0,0), (0,3,-1)\}\right).$$

O conjunto $\{(1,0,1), (2,0,0), (0,3,-1)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

(xiii) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $T(x, y, z) = (x, y, z)$. T é linear e tem-se

$$M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1,0,0)=(1,0,0)$, $T(0,1,0)=(0,1,0)$ e $T(0,0,1)=(0,0,1)$. Tem-se

$$\mathcal{N}(T)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: T(x,y,z)=(0,0,0)\right\}=\{(0,0,0)\}.$$

Logo, $\dim\mathcal{N}(T)=0$ e T é injectiva. Uma vez que

$$\dim\underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{espaço de partida}}=\dim\mathcal{N}(T)+\dim\mathcal{I}(T),$$

então $\dim\mathcal{I}(T)=3$. Vejamos como encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$. Tem-se

$$\mathcal{I}(T)=\{(x,y,z): x,y,z\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}^3,$$

isto é, T é sobrejectiva. Como o conjunto $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{I}(T)$ então $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

Como T é injectiva e sobrejectiva, então T é bijectiva.

(xiv) Seja $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ com $T(x,y)=(x\cos\theta-y\operatorname{sen}\theta, x\operatorname{sen}\theta+y\cos\theta)$, $\theta\in\mathbb{R}$. T é linear e

$$M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1,0)=(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)$ e $T(0,1)=(-\operatorname{sen}\theta,\cos\theta)$.

Atendendo ao ex^o 4 (viii) da ficha 2, tem-se, para todo o $\theta\in\mathbb{R}$,

$$\left(M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)\right)^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta\\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{bmatrix}.$$

Logo

$$\mathcal{N}(T)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: T(x,y)=(0,0)\right\}=\{(0,0)\}$$

e $\dim\mathcal{N}(T)=0$, isto é, T é injectiva.

Sendo T injectiva e tendo-se dim (espaço de partida) = dim (espaço de chegada) então T também é sobrejectiva.

Como T é injectiva e sobrejectiva, então T é bijectiva.

Como o conjunto $\{(1,0),(0,1)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{I}(T)$ então $\{(1,0),(0,1)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

(xv) Seja $T:\mathcal{P}_2\to\mathcal{P}_2$ com

$$T(p(t))=2p(1-t)-tp'(t).$$

T é linear uma vez que, para todos os $p(t), p_1(t), p_2(t)\in\mathcal{P}_2$, para todo o $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}T(p_1(t)+p_2(t)) &= T((p_1+p_2)(t))=2(p_1+p_2)(1-t)-t(p_1+p_2)'(t)=\\ &= 2p_1(1-t)+2p_2(1-t)-tp_1'(t)-tp_2'(t)=\\ &= 2p_1(1-t)-tp_1'(t)+2p_2(1-t)-tp_2'(t)=\\ &= T(p_1(t))+T(p_2(t)),\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} T(\lambda p\,(t)) & = & T((\lambda p)\,(t)) = 2\,(\lambda p)\,(1-t) - t\,(\lambda p)'\,(t) = \\ & = & \lambda 2p\,(1-t) - t\lambda p'\,(t) = \lambda\,(2p\,(1-t) - tp'\,(t)) = \lambda T(p\,(t)). \end{array}$$

Sendo $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ a base canónica de $\mathcal{P}_2$, tem-se

$$M(T;\mathcal{B};\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1) = 2 \times 1 - t \times 0 = 2$, $T(t) = 2\,(1-t) - t \times 1 = 2 - 3t$ e

$$T(t^2) = 2\,(1-t)^2 - t2t = 2 - 4t + 2t^2 - 2t^2 = 2 - 4t.$$

Uma base para $\mathcal{N}(T)$:

Como

$$\mathcal{N}\,(M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = L\,(\{(1,-4,3)\}),$$

então

$$\mathcal{N}\,(T) = \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : (a_0, a_1, a_2) \in L\,(\{(1,-4,3)\})\right\} = L\left(\left\{1 - 4t + 3t^2\right\}\right).$$

Como $\{1 - 4t + 3t^2\}$ é uma base de $\mathcal{N}\,(T)$, $\dim \mathcal{N}\,(T) = 1$. Logo, T não é injectiva, uma vez que $\dim \mathcal{N}\,(T) \neq 0$.

Resolução alternativa para encontrar uma base para $\mathcal{N}(T)$:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{N}\,(T) & = & \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : T\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right) = \mathbf{0}\right\} = \\ & = & \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : 2\left(a_0 + a_1\,(1-t) + a_2\,(1-t)^2\right) - t\,(a_1 + 2a_2 t) = \mathbf{0}\right\} = \\ & = & \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : 2a_0 + 2a_1 - 2a_1 t + 2a_2 - 4a_2 t + 2a_2 t^2 - a_1 t - 2a_2 t^2 = \mathbf{0}\right\} = \\ & = & \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : 2a_0 + 2a_1 + 2a_2 + (-3a_1 - 4a_2)\,t = \mathbf{0}\right\} = \\ & = & \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_1 = -\dfrac{4}{3}a_2 \;\text{ e }\; a_0 = \dfrac{1}{3}a_2\right\} = \\ & = & \left\{\dfrac{1}{3}a_2 - \dfrac{4}{3}a_2 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 \in \mathbb{R}\right\} = L\left(\left\{\dfrac{1}{3} - \dfrac{4}{3}t + t^2\right\}\right) = L\left(\left\{1 - 4t + 3t^2\right\}\right). \end{array}$$

Como $\{1 - 4t + 3t^2\}$ é uma base de $\mathcal{N}\,(T)$, $\dim \mathcal{N}\,(T) = 1$.

Uma base para $\mathcal{I}(T)$:

Como $\{1, t, t^2\}$ gera $\mathcal{P}_2$, tem-se

$$\mathcal{I}\,(T) = L\left(\left\{T\,(1)\,, T\,(t)\,, T\left(t^2\right)\right\}\right) = L\,(\{2, 2-3t, 2-4t\}) = L\,(\{2, 2-3t\}).$$

Uma vez que o conjunto $\{2, 2-3t\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{I}\,(T)$, então $\{2, 2-3t\}$ é uma base de $\mathcal{I}\,(T)$, tendo-se $\dim \mathcal{I}\,(T) = 2$.

Como $\dim \mathcal{P}_2 = 3$, tem-se $\mathcal{I}\,(T) \neq \mathcal{P}_2$, pelo que T não é sobrejectiva.

Resolução alternativa para encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$:

Sendo $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, com $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{aligned} T(p(t)) &= 2\left(a_0 + a_1(1-t) + a_2(1-t)^2\right) - t(a_1 + 2a_2 t) = \\ &= 2a_0 + 2a_1 - 2a_1 t + 2a_2 - 4a_2 t + 2a_2 t^2 - a_1 t - 2a_2 t^2 = \\ &= a_0 2 + a_1(2-3t) + a_2(2-4t). \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{I}(T) = L(\{2, 2-3t, 2-4t\}) = L(\{2, 2-3t\})$. Uma vez que o conjunto $\{2, 2-3t\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T)$, então $\{2, 2-3t\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

(xvi) Seja $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ com

$$T(p(t)) = p(0) - p(-1) + (p(-1) + p(1))\, t + (p(-1) - p(1) - 2p(0))\, t^2.$$

T é linear uma vez que, para todos os $p(t), p_1(t), p_2(t) \in \mathcal{P}_2$, para todo o $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$T(p_1(t) + p_2(t)) = T((p_1 + p_2)(t)) =$$

$$\begin{aligned} =\ & (p_1+p_2)(0) - (p_1+p_2)(-1) + ((p_1+p_2)(-1) + (p_1+p_2)(1))\, t + \\ & + ((p_1+p_2)(-1) - (p_1+p_2)(1) - 2(p_1+p_2)(0))\, t^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} =\ & p_1(0) - p_1(-1) + (p_1(-1) + p_1(1))\, t + (p_1(-1) - p_1(1) - 2p_1(0))\, t^2 + \\ & + p_2(0) - p_2(-1) + (p_2(-1) + p_2(1))\, t + (p_2(-1) - p_2(1) - 2p_2(0))\, t^2 \end{aligned}$$

$$= T(p_1(t)) + T(p_2(t)),$$

$$\begin{aligned} T(\lambda p(t)) &= T((\lambda p)(t)) = \lambda\left(p(0) - p(-1) + (p(-1) + p(1))\, t + (p(-1) - p(1) - 2p(0))\, t^2\right) = \\ &= \lambda T(p(t)). \end{aligned}$$

Sendo $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ a base canónica de $\mathcal{P}_2$, tem-se

$$M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1) = 1 - 1 + (1+1)\, t + (1 - 1 - 2)\, t^2 = 2t - 2t^2$,

$$T(t) = 0 - (-1) + ((-1) + 1)\, t + ((-1) - 1 - 2 \times 0)\, t^2 = 1 - 2t^2$$

e

$$T(t^2) = 0 - 1 + (1+1)\, t + (1 - 1 - 2 \times 0)\, t^2 = -1 + 2t.$$

Uma base para $\mathcal{N}(T)$:

Como

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})) &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \\ &= L(\{(-1, 1, 1)\}), \end{aligned}$$

então

$$\mathcal{N}(T) = \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : (a_0, a_1, a_2) \in L(\{(-1,1,1)\})\right\} = L\left(\left\{-1 + t + t^2\right\}\right).$$

Como $\{-1 + t + t^2\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$, $\dim \mathcal{N}(T) = 1$. Logo, T não é injectiva, uma vez que $\dim \mathcal{N}(T) \neq 0$.

Resolução alternativa para encontrar uma base para $\mathcal{N}(T)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(T) &= \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : T\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right) = \mathbf{0}\right\} = \\
&= \left\{\begin{array}{c} a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : p(0) - p(-1) + (p(-1) + p(1))\, t + \\ + (p(-1) - p(1) - 2p(0))\, t^2 = \mathbf{0} \end{array}\right\} = \\
&= \left\{\begin{array}{c} a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : p(0) - p(-1) = 0 \text{ e } p(-1) + p(1) = 0 \text{ e} \\ p(-1) - p(1) - 2p(0) = 0 \end{array}\right\} = \\
&= \left\{\begin{array}{c} a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_0 - (a_0 - a_1 + a_2) = 0 \text{ e} \\ (a_0 - a_1 + a_2) + (a_0 + a_1 + a_2) = 0 \text{ e} \\ (a_0 - a_1 + a_2) - (a_0 + a_1 + a_2) - 2a_0 = 0 \end{array}\right\} = \\
&= \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_1 = a_2 \text{ e } a_0 = -a_2\right\} = \\
&= \left\{-a_2 + a_2 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 \in \mathbb{R}\right\} = \left\{a_2\left(-1 + t + t^2\right) \in \mathcal{P}_2 : a_2 \in \mathbb{R}\right\} = \\
&= L\left(\left\{-1 + t + t^2\right\}\right).
\end{aligned}$$

Como $\{-1 + t + t^2\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$, $\dim \mathcal{N}(T) = 1$.

Uma base para $\mathcal{I}(T)$:

Como $\{1, t, t^2\}$ gera $\mathcal{P}_2$, tem-se

$$\mathcal{I}(T) = L\left(\left\{T(1), T(t), T\left(t^2\right)\right\}\right) = L\left(\left\{2t - 2t^2, 1 - 2t^2, -1 + 2t\right\}\right) = L\left(\left\{1 - 2t^2, -1 + 2t\right\}\right).$$

Uma vez que o conjunto $\{1 - 2t^2, -1 + 2t\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T)$, então

$$\left\{1 - 2t^2, -1 + 2t\right\}$$

é uma base de $\mathcal{I}(T)$, tendo-se $\dim \mathcal{I}(T) = 2$.

Como $\dim \mathcal{P}_2 = 3$, tem-se $\mathcal{I}(T) \neq \mathcal{P}_2$, pelo que T não é sobrejectiva.

Resolução alternativa para encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$:

Sendo $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, com $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, tem-se

$$T(p(t)) = p(0) - p(-1) + (p(-1) + p(1))\, t + (p(-1) - p(1) - 2p(0))\, t^2 =$$

$$= a_0 - \left(a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2\right) + \left(a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 + a_0 + a_1 + a_2\right) t +$$

$$+ \left(a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 - (a_0 + a_1 + a_2) - 2a_0\right) t^2 =$$

$$= a_1 - a_2 + (2a_0 + 2a_2)\, t + (-2a_0 - 2a_1)\, t^2 = a_0\left(2t - 2t^2\right) + a_1\left(1 - 2t^2\right) + a_2(-1 + 2t).$$

Logo, $\mathcal{I}(T) = L(\{2t - 2t^2, 1 - 2t^2, -1 + 2t\}) = L(\{2t - 2t^2, 1 - 2t^2\})$. Como o conjunto

$$\left\{2t - 2t^2, 1 - 2t^2\right\}$$

é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T)$, então $\{2t - 2t^2, 1 - 2t^2\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

(xvii) Seja $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ com $T(p(t)) = \begin{bmatrix} p(1) & p(0) \\ p(0) & p(-1) \end{bmatrix}$.

T é linear uma vez que, para todos os $p(t), p_1(t), p_2(t) \in \mathcal{P}_2$, para todo o $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$T(p_1(t) + p_2(t)) = T((p_1 + p_2)(t)) = \begin{bmatrix} (p_1+p_2)(1) & (p_1+p_2)(0) \\ (p_1+p_2)(0) & (p_1+p_2)(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p_1(1) + p_2(1) & p_1(0) + p_2(0) \\ p_1(0) + p_2(0) & p_1(-1) + p_2(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1(1) & p_1(0) \\ p_1(0) & p_1(-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_2(1) & p_2(0) \\ p_2(0) & p_2(-1) \end{bmatrix} =$$

$$= T(p_1(t)) + T(p_2(t)),$$

$$\begin{aligned} T(\lambda p(t)) &= T((\lambda p)(t)) = \begin{bmatrix} (\lambda p)(1) & (\lambda p)(0) \\ (\lambda p)(0) & (\lambda p)(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda p(1) & \lambda p(0) \\ \lambda p(0) & \lambda p(-1) \end{bmatrix} = \\ &= \lambda \begin{bmatrix} p(1) & p(0) \\ p(0) & p(-1) \end{bmatrix} = \lambda T(p(t)). \end{aligned}$$

Sendo $\mathcal{B}_1 = \{1, t, t^2\}$ a base canónica de $\mathcal{P}_2$ e

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

a base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tem-se

$$M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

uma vez que

$$T(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad T(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad T(t^2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cálculo de $\mathcal{N}(T)$:

Como

$$\mathcal{N}(M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2)) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \{(0,0,0)\},$$

então

$$\mathcal{N}(T) = \left\{ a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : (a_0, a_1, a_2) = (0,0,0) \right\} = \{\mathbf{0}\}.$$

Logo, T é injectiva uma vez que $\dim \mathcal{N}(T) = 0$.

Resolução alternativa para calcular $\mathcal{N}(T)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(T) &= \left\{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : T(p(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} = \\
&= \left\{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : \begin{bmatrix} p(1) & p(0) \\ p(0) & p(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} = \\
&= \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : \begin{bmatrix} a_0 + a_1 + a_2 & a_0 \\ a_0 & a_0 - a_1 + a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} = \\
&= \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_0 = 0 \quad \text{e} \quad a_1 = a_2 = 0\right\} = \{0\}.
\end{aligned}$$

Uma base para $\mathcal{I}(T)$:

Como $\{1, t, t^2\}$ gera $\mathcal{P}_2$, tem-se

$$\mathcal{I}(T) = L\left(\left\{T(1), T(t), T\left(t^2\right)\right\}\right) = L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

Uma vez que o conjunto $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T)$, então

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

é uma base de $\mathcal{I}(T)$, tendo-se $\dim \mathcal{I}(T) = 3$.

Como $\dim \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4$, tem-se $\mathcal{I}(T) \neq \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, pelo que T não é sobrejectiva.

Resolução alternativa para encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$:

Sendo $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, com $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{aligned}
T(p(t)) = \begin{bmatrix} p(1) & p(0) \\ p(0) & p(-1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_0 + a_1 + a_2 & a_0 \\ a_0 & a_0 - a_1 + a_2 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} a_0 & a_0 \\ a_0 & a_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & -a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} = \\
&= a_0 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{I}(T) = L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}\right)$. Como o conjunto

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T)$, então é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

3. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^3 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ é representada pela matriz

$$M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tem-se

$$T(x,y,z) = M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (x+2y+z, x+y, 2x-y).$$

Tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(T) &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (0,0,0)\right\} = \\ &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x+2y+z, x+y, 2x-y) = (0,0,0)\right\} = \\ &= \{(0,0,0)\}.\end{aligned}$$

Logo, $\dim \mathcal{N}(T) = 0$ e T é injectiva. Uma vez que

$$\dim \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{espaço de partida}} = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T),$$

então $\dim \mathcal{I}(T) = 3$. Vejamos como encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$. Tem-se

$$\mathcal{I}(T) = \{(x+2y+z, x+y, 2x-y) : x,y,z\in\mathbb{R}\} = L\left(\{(1,1,2),(2,1,-1),(1,0,0)\}\right).$$

Como o conjunto $\{(1,1,2),(2,1,-1),(1,0,0)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{I}(T)$ então $\{(1,1,2),(2,1,-1),(1,0,0)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

Por outro lado, como $\mathcal{I}(T)$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$ e $\dim \mathcal{I}(T) = \dim \mathbb{R}^3$ então $\mathcal{I}(T) = \mathbb{R}^3$, isto é, T é sobrejectiva.

Como T é injectiva e sobrejectiva, então T é bijectiva.

Resolução alternativa para encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$. Sendo

$$M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

a matriz que representa a transformação linear T em relação à base canónica $\mathcal{B}_c^3$ no espaço de partida e no espaço de chegada, tem-se

$$T(x,y,z) = M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(T) &= \mathcal{N}\left(M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -2 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right) = \{(0,0,0)\}\end{aligned}$$

e

$$\mathcal{I}(T) = \mathcal{C}\left(M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)\right) = \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(1,1,2),(2,1,-1),(1,0,0)\}\right).$$

O conjunto $\{(1,1,2),(2,1,-1),(1,0,0)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

4. Considere a base ordenada $\mathcal{B}=\{v_1,v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, em que $v_1=(1,1)$ e $v_2=(1,0)$ e seja $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que

$$T(v_1)=(1,-2),\quad T(v_2)=(-3,1).$$

(i) Tem-se $T(2,1)=T\left((1,1)+(1,0)\right) \underbrace{=}_{T \text{ é linear}} T(1,1)+T(1,0)=(1,-2)+(-3,1)=(-2,-1)$.

(ii) Seja $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Tem-se

$$(x,y)=y(1,1)+(x-y)(1,0).$$

Logo,

$$\begin{aligned} T(x,y) &= T\left(y(1,1)+(x-y)(1,0)\right) \underbrace{=}_{T \text{ é linear}} yT(1,1)+(x-y)T(1,0)= \\ &= y(1,-2)+(x-y)(-3,1)=(-3x+4y,x-3y). \end{aligned}$$

(iii) Tem-se

$$M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)=\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix},$$

uma vez que, pela alínea **(ii)**, $T(1,0)=(-3,1)$ e $T(0,1)=(4,-3)$.

Observação: Poderíamos ter calculado $T(1,0)$ e $T(0,1)$ sem recorrer à alinea **(ii)**, uma vez que

$$(1,0)=0(1,1)+(1,0) \text{ e } (0,1)=(1,1)-(1,0).$$

Logo, sendo T linear, tem-se (usando só o enunciado)

$$T(1,0)=(-3,1) \text{ e } T(0,1)=T(1,1)-T(1,0)=(1,-2)-(-3,1)=(4,-3).$$

(iv) Tem-se

$$S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{B}}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

uma vez que

$$(1,0)=0(1,1)+(1,0) \text{ e } (0,1)=(1,1)-(1,0).$$

Tem-se

$$S_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}_c^2}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

uma vez que

$$(1,1)=(1,0)+(0,1) \text{ e } (1,0)=(1,0)+0(0,1).$$

As coordenadas do vector $(2,1)$ na base $\mathcal{B}$ são dadas por:

$$S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{B}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Observação 1: Na verdade poderíamos ter determinado as coordenadas do vector $(2,1)$ na base $\mathcal{B}$ usando a definição de coordenadas de um vector numa base:

$$(2,1) = (1,1) + (1,0).$$

Logo, as coordenadas do vector $(2,1)$ na base $\mathcal{B}$ são precisamente 1 e 1.

Observação 2: Tem-se

$$S_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}_c^2} = \left(S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{B}}\right)^{-1} \quad \text{e} \quad S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{B}} = \left(S_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}_c^2}\right)^{-1}.$$

(v) Determinemos a matriz $M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})$ usando só a definição de matriz que representa uma transformação linear em relação a uma base ordenada $\mathcal{B}$ no espaço de partida e no espaço de chegada. Tem-se

$$M(T;\mathcal{B};\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix},$$

uma vez que

$$T(1,1) = (1,-2) = -2(1,1) + 3(1,0) \;\text{ e }\; T(1,0) = (-3,1) = (1,1) - 4(1,0).$$

Determinemos agora as coordenadas do vector $T(2,1)$ na base $\mathcal{B}$ sem usar as alíneas anteriores. Tem-se

$$\begin{aligned} T(2,1) &= T\left((1,1)+(1,0)\right) \underbrace{=}_{T \text{ é linear}} T(1,1) + T(1,0) = \\ &= (1,-2) + (-3,1) = (-2,-1) = -(1,1) - (1,0). \end{aligned}$$

Logo, as coordenadas do vector $T(2,1)$ na base $\mathcal{B}$ são -1 e -1.

Resolução alternativa: Determinemos a matriz $M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})$ e as coordenadas do vector $T(2,1)$ na base $\mathcal{B}$ usando as alíneas anteriores. Tem-se

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2,\mathcal{B}_c^2) & \overset{M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)}{\underset{T}{\longrightarrow}} & (\mathbb{R}^2,\mathcal{B}_c^2) \\ S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{B}} \downarrow I & & I \downarrow S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{B}} \\ (\mathbb{R}^2,\mathcal{B}) & \overset{T}{\underset{M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})}{\longrightarrow}} & (\mathbb{R}^2,\mathcal{B}) \end{array}$$

Logo,

$$M(T;\mathcal{B};\mathcal{B}) = S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{B}} M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2) \left(S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{B}}\right)^{-1} = S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{B}} M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2) S_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}_c^2} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Além disso tem-se

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c}\text{coordenadas de } (2,1) \\ \text{na base } \mathcal{B}_c^2\end{array} & \overset{M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)}{\underset{T}{\longrightarrow}} & \begin{array}{c}\text{coordenadas de } T(2,1) \\ \text{na base } \mathcal{B}_c^2\end{array} \\ S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{B}} \downarrow I & & I \downarrow S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{B}} \\ \begin{array}{c}\text{coordenadas de } (2,1) \\ \text{na base } \mathcal{B}\end{array} & \overset{T}{\underset{M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})}{\longrightarrow}} & \begin{array}{c}\text{coordenadas de } T(2,1) \\ \text{na base } \mathcal{B}.\end{array} \end{array}$$

Logo, sendo 2 e 1 as coordenadas do vector $(2,1)$ na base $\mathcal{B}_c^2$ então as coordenadas do vector $T(2,1)$ na base $\mathcal{B}$ são dadas por

$$M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{B}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(vi) Determinemos a matriz $M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B})$ usando só a definição de matriz que representa uma transformação linear em relação às bases ordenadas no espaço de partida e no espaço de chegada. Tem-se

$$M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 7 \end{bmatrix},$$

uma vez que

$$T(1,0) = (-3,1) = (1,1) - 4(1,0)$$

e

$$\begin{aligned} T(0,1) &= T\left((1,1)-(1,0)\right) = T(1,1) - T(1,0) = \\ &= (1,-2) - (-3,1) = (4,-3) = -3(1,1) + 7(1,0). \end{aligned}$$

Resolução alternativa: Tendo em conta o diagrama

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2,\mathcal{B}_c^2) & \underset{T}{\overset{M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)}{\longrightarrow}} & (\mathbb{R}^2,\mathcal{B}_c^2) \\ S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{B}} \downarrow I & & I \downarrow S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{B}} \\ (\mathbb{R}^2,\mathcal{B}) & \underset{M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})}{\overset{T}{\longrightarrow}} & (\mathbb{R}^2,\mathcal{B}) \end{array}$$

tem-se

$$M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}) = M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}.$$

(vii) Determinemos a matriz $M(T;\mathcal{B};\mathcal{B}_c^2)$ usando só a definição de matriz que representa uma transformação linear em relação às bases ordenadas no espaço de partida e no espaço de chegada. Tem-se

$$M(T;\mathcal{B};\mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},$$

uma vez que

$$T(1,1) = (1,-2) = (1,0) - 2(0,1)$$

e

$$T(1,0) = (-3,1) = -3(1,0) + (0,1).$$

Resolução alternativa: Tendo em conta o diagrama

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2,\mathcal{B}) & \underset{T}{\overset{M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})}{\longrightarrow}} & (\mathbb{R}^2,\mathcal{B}) \\ S_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}_c^2} \downarrow I & & I \downarrow S_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}_c^2} \\ (\mathbb{R}^2,\mathcal{B}_c^2) & \underset{M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)}{\overset{T}{\longrightarrow}} & (\mathbb{R}^2,\mathcal{B}_c^2) \end{array}$$

tem-se

$$M(T;\mathcal{B};\mathcal{B}_c^2) = M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)S_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}_c^2} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Considere as transformações lineares T_1 e T_2 cujas matrizes que as representam em relação às bases canónicas (ordenadas) de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ são dadas respectivamente por

$$M(T_1;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tem-se $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com

$$T_1(x,y,z) = M(T_1;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (2x+z, x+y).$$

Tem-se $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ com

$$T_2(x,y) = M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^3)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (y, y, x+y).$$

Logo, tem-se $T_1 \circ T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear com

$$\begin{aligned} (T_1 \circ T_2)(x,y) &= M(T_1;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2)M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^3)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (x+3y, 2y) \end{aligned}$$

e $T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linear com

$$(T_2 \circ T_1)(x,y,z) = M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^3)M(T_1;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (x+y, x+y, 3x+y+z).$$

Resolução alternativa: Tendo-se $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com $T_1(x,y,z) = (2x+z, x+y)$ e $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ com $T_2(x,y) = (y,y,x+y)$, então $T_1 \circ T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é linear com

$$(T_1 \circ T_2)(x,y) = T_1(T_2(x,y)) = T_1(y,y,x+y) = (x+3y, 2y)$$

e $T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é linear com

$$(T_2 \circ T_1)(x,y,z) = T_2(T_1(x,y,z)) = T_2(2x+z, x+y) = (x+y, x+y, 3x+y+z).$$

6. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (2y, y - x, -x).$$

Considere a base ordenada $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ com

$$v_1 = (1, 0, -1), \quad v_2 = (1, 2, 0), \quad v_3 = (-1, 1, 1).$$

Tem-se

$$M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & -5 & -4 \end{bmatrix},$$

uma vez que

$$\begin{aligned} T(1, 0, -1) &= (0, -1, -1) = 2(1, 0, -1) - (1, 2, 0) + (-1, 1, 1), \\ T(1, 2, 0) &= (4, 1, -1) = -4(1, 0, -1) + 3(1, 2, 0) - 5(-1, 1, 1) \ \text{ e} \\ T(-1, 1, 1) &= (2, 2, 1) = -5(1, 0, -1) + 3(1, 2, 0) - 4(-1, 1, 1). \end{aligned}$$

7. Seja

$$\mathcal{B}_c^{2\times 2} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

a base canónica (ordenada) de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Considere a transformação linear

$$S : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ \text{ definida por } \ S(A) = A^T.$$

Tem-se

$$M(S; \mathcal{B}_c^{2\times 2}; \mathcal{B}_c^{2\times 2}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

uma vez que

$$S\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad S\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$S\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad S\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e a base canónica (ordenada)

$$\mathcal{B}_c^3 = \{v_1, v_2, v_3\} \ \text{ de } \ \mathbb{R}^3, \ \text{ com } \ v_1 = (1, 0, 0), \quad v_2 = (0, 1, 0), \quad v_3 = (0, 0, 1).$$

Suponha que se tem

$$T(v_3) = 3v_1 + v_2 - 2v_3, \qquad T(v_2 + v_3) = v_1 \qquad \text{e} \qquad T(v_1 + v_2 + v_3) = v_2 + v_3.$$

Logo,

$$T(0,0,1) = T(v_3) = (3,1,-2),$$

$$T(0,1,0) = T(v_2) = T(v_2+v_3) - T(v_3) = -2v_1 - v_2 + 2v_3 = (-2,-1,2)$$

e

$$T(1,0,0) = T(v_1) = T(v_1+v_2+v_3) - T(v_2+v_3) = -v_1 + v_2 + v_3 = (-1,1,1).$$

Assim:

(i)

$$T(2v_1 - v_2 + 3v_3) = 2T(v_1) - T(v_2) + 3T(v_3) =$$

$$= 2(-1,1,1) - (-2,-1,2) + 3(3,1,-2) = (9,6,-6);$$

(ii)

$$M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

(iii) Seja $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_c^3$ a base canónica ordenada de $\mathbb{R}^3$. Determinemos uma base ordenada $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ de modo a que a matriz $M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)$ que represente T em relação a essas bases $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ seja a matriz identidade:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tem-se $T(1,0,0) = w_1$, $T(0,1,0) = w_2$ e $T(0,0,1) = w_3$. Logo,

$$\mathcal{B}_2 = \{(-1,1,1), (-2,-1,2), (3,1,-2)\}.$$

9. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que em relação às bases ordenadas $\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B}_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ com

$$u_1 = (1,1), \quad u_2 = (2,-1), \quad v_1 = (1,0,1), \quad v_2 = (1,1,2), \quad v_3 = (0,1,-1),$$

é representada pela matriz

$$M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Considere ainda as bases ordenadas $\mathcal{B}_1' = \left\{u_1', u_2'\right\}$ de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B}_2' = \left\{v_1', v_2', v_3'\right\}$ de $\mathbb{R}^3$ com

$$u_1' = (1,0), \quad u_2' = (1,1), \quad v_1' = (1,0,0), \quad v_2' = (1,1,0), \quad v_3' = (1,1,1).$$

(i) Tem-se

$$(-1,2) = (1,1) - (2,-1).$$

Logo, as coordenadas do vector $(-1,2)$ na base $\mathcal{B}_1$ são 1 e -1. Deste modo, as coordenadas do vector $T(-1,2)$ na base $\mathcal{B}_2$ são dadas por

$$M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\-1&1\\3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-2\\3\end{bmatrix}.$$

(ii) Tem-se

$$(-1,2)=-3(1,0)+2(1,1).$$

Logo, as coordenadas do vector $(-1,2)$ na base $\mathcal{B}_1'$ são -3 e 2.

Resolução alternativa: Tem-se

$$S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_1'}=\begin{bmatrix}0&3\\1&-1\end{bmatrix},$$

uma vez que $u_1=0u_1'+u_2'$ e $u_2=3u_1'-u_2'$. Tendo em conta (por **(i)**) que as coordenadas do vector $(-1,2)$ na base $\mathcal{B}_1$ são 1 e -1, então as coordenadas do vector $(-1,2)$ na base $\mathcal{B}_1'$ são dadas por

$$S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_1'}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&3\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}.$$

(iii) Uma vez que (por **(i)**) as coordenadas do vector $T(-1,2)$ na base $\mathcal{B}_2$ são -1, -2 e 3, então

$$T(-1,2)=-(1,0,1)-2(1,1,2)+3(0,1,-1)=(-3,1,-8).$$

Por outro lado, tem-se

$$(-3,1,-8)=-4(1,0,0)+9(1,1,0)-8(1,1,1).$$

Logo, as coordenadas do vector $T(-1,2)$ na base $\mathcal{B}_2'$ são -4, 9 e -8.

Resolução alternativa: Determinemos a matriz de mudança de base $S_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_2'}$. Tem-se

$$S_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_2'}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\-1&-1&2\\1&2&-1\end{bmatrix},$$

uma vez que $v_1=v_1'-v_2'+v_3'$, $v_2=0v_1'-v_2'+2v_3'$ e $v_3=-v_1'+2v_2'-v_3'$. Tendo em conta que (por **(i)**) as coordenadas do vector $T(-1,2)$ na base $\mathcal{B}_2$ são -1, -2 e 3, então as coordenadas do vector $T(-1,2)$ na base $\mathcal{B}_2'$ são dadas por

$$S_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_2'}\begin{bmatrix}-1\\-2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\-1&-1&2\\1&2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\-2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\9\\-8\end{bmatrix}.$$

(iv) Determinemos uma base para $\mathcal{N}(T)$. Seja $u\in\mathbb{R}^2$ e sejam (α_1,α_2) as coordenadas de u em relação à base

$$\mathcal{B}_1=\{(1,1),(2,-1)\}.$$

Tem-se

$$u \in \mathcal{N}(T) \Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathcal{N}(M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2))$$

e como

$$\mathcal{N}(M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \{(0,0)\},$$

$$\mathcal{N}(T) = \{0(1,1) + 0(2,-1)\} = \{(0,0)\}.$$

Assim, $\dim \mathcal{N}(T) = 0$ e T é injectiva.

(v) Determinemos uma base para $\mathcal{I}(T)$. Como $\{(1,1),(2,-1)\}$ gera $\mathbb{R}^2$, tem-se

$$\mathcal{I}(T) = L(\{T(1,1), T(2,-1)\}) =$$

$$= L(\{1(1,0,1) + (-1)(1,1,2) + 3(0,1,-1), 2(1,0,1) + 1(1,1,2) + 0(0,1,-1)\}) =$$
$$= L(\{(0,2,-4),(3,1,4)\}).$$

Uma vez que o conjunto $\{(0,2,-4),(3,1,4)\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T)$, então

$$\{(0,2,-4),(3,1,4)\}$$

é uma base de $\mathcal{I}(T)$, tendo-se $\dim \mathcal{I}(T) = 2$.

Como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, tem-se $\mathcal{I}(T) \neq \mathbb{R}^3$, pelo que T não é sobrejectiva.

(vi) Determinemos a expressão geral de T, isto é, $T(x,y)$, para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Considerando as bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ e de $\mathbb{R}^3$ respectivamente:

$$\mathcal{B}_c^2 = \{(1,0),(0,1)\}, \qquad \mathcal{B}_c^3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\},$$

tem-se

$$M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^3) = S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_c^3} M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2) \left(S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_c^2}\right)^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Logo, para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$T(x,y) = M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^3) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y \\ x+y \\ -4y \end{bmatrix} = (x-y, x+y, -4y).$$

Resolução alternativa à alínea (v) para encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$:

Tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(T) &= \left\{T(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{(x-y, x+y, -4y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \\ &= \left\{(x,x,0) + (-y,y,-4y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \\ &= \left\{x(1,1,0) + y(-1,1,-4) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \\ &= L(\{(1,1,0),(-1,1,-4)\}) \end{aligned}$$

Como o conjunto $\{(1,1,0),(-1,1,-4)\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T)$, então

$$\{(1,1,0),(-1,1,-4)\}$$

é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

Note que:

$$L(\{(1,1,0),(-1,1,-4)\}) = L(\{(0,2,-4),(3,1,4)\}).$$

(vii) Tem-se

$$\begin{array}{ccc} & (\mathbb{R}^2,\mathcal{B}_1) & \overset{M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)}{\underset{T}{\longrightarrow}} & (\mathbb{R}^3,\mathcal{B}_2) & \\ S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_1'} & \downarrow I & & I\downarrow & S_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_2'} \\ & (\mathbb{R}^2,\mathcal{B}_1') & \overset{T}{\underset{M(T;\mathcal{B}_1';\mathcal{B}_2')}{\longrightarrow}} & (\mathbb{R}^3,\mathcal{B}_2') & \end{array}$$

Logo,

$$M(T;\mathcal{B}_1';\mathcal{B}_2') = S_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_2'}M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)\left(S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_1'}\right)^{-1} = S_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_2'}M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)S_{\mathcal{B}_1'\to\mathcal{B}_1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 6 & -3 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 6 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

10. Considere a transformação linear $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x,y,z) = (x+y, x+y-z).$$

(i) Tem-se

$$M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1,0,0) = (1,1)$, $T(0,1,0) = (1,1)$ e $T(0,0,1) = (0,-1)$.

(ii) Tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(T) &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (0,0)\right\} = \\ &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x+y,x+y-z) = (0,0)\right\} = \\ &= \left\{(x,-x,0)\in\mathbb{R}^3 : x\in\mathbb{R}\right\} = L(\{(1,-1,0)\}). \end{aligned}$$

Logo, o conjunto $\{(1,-1,0)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$ e $\dim\mathcal{N}(T) = 1$. T não é injectiva, uma vez que $\mathcal{N}(T)\neq\{(0,0)\}$.

(iii) Tem-se

$$\mathcal{I}(T) = \{(x+y,x+y-z) : x,y,z\in\mathbb{R}\} = \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = L(\{(1,1),(0,-1)\}).$$

Como o conjunto $\{(1,1),(0,-1)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{I}(T)$ então $\{(1,1),(0,-1)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$ e tem-se $\dim\mathcal{I}(T) = 2$.

Por outro lado, como $\mathcal{I}(T)$ é subespaço de $\mathbb{R}^2$ e $\dim \mathcal{I}(T) = \dim \mathbb{R}^2$ então $\mathcal{I}(T) = \mathbb{R}^2$, isto é, T é sobrejectiva.

(iv) O vector $(1, 0, 0)$ é uma solução particular da equação linear

$$T(x, y, z) = (1, 1).$$

Logo, a solução geral da equação linear $T(x, y, z) = (1, 1)$ é dada por:

$$\{(1, 0, 0)\} + \mathcal{N}(T) = \left\{(1 + t, -t, 0) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\right\}.$$

(v) Não existe nenhum vector $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ para o qual a equação linear $T(x, y, z) = (a, b)$ seja impossível, uma vez que T é sobrejectiva.

(vi) Não existe nenhum vector $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ para o qual a equação linear $T(x, y, z) = (a, b)$ seja possível e determinada, uma vez que T não é injectiva.

11. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz $M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)$ que a representa em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^3$ de $\mathbb{R}^3$ é dada por

$$M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(i) Seja $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Tem-se

$$T(x, y, z) = M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (x + 2y + 2z, 2x + y + 4z, 2z).$$

(ii) Tem-se

$$\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = \{(0, 0, 0)\}.$$

Logo, T é injectiva e $\dim \mathcal{N}(T) = 0$.

(iii) Tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(T) &= \{(x + 2y + 2z, 2x + y + 4z, 2z) : x, y, z \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{x(1, 2, 0) + y(2, 1, 0) + z(2, 4, 2) : x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= L\left(\{(1, 2, 0), (2, 1, 0), (2, 4, 2)\}\right). \end{aligned}$$

Como o conjunto $\{(1, 2, 0), (2, 1, 0), (2, 4, 2)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{I}(T)$ então $\{(1, 2, 0), (2, 1, 0), (2, 4, 2)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$ e tem-se $\dim \mathcal{I}(T) = 3$. Por outro lado, como $\mathcal{I}(T)$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$ e $\dim \mathcal{I}(T) = \dim \mathbb{R}^3$ então $\mathcal{I}(T) = \mathbb{R}^3$, isto é, T é sobrejectiva.

(iv) Como $T(1,1,0) = T(1,0,0) + T(0,1,0) = (2,1,0) + (1,2,0) = (3,3,0)$, então o vector $(1,1,0)$ é uma solução particular da equação linear

$$T(x,y,z) = (3,3,0).$$

Logo, a solução geral da equação linear $T(x,y,z) = (3,3,0)$ é dada por:

$$\{(1,1,0)\} + \mathcal{N}(T) = \{(1,1,0)\}.$$

(v) Não existe nenhum vector $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ para o qual a equação linear $T(x,y,z) = (a,b,c)$ seja impossível, uma vez que T é sobrejectiva.

(vi) Não existe nenhum vector $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ para o qual a equação linear $T(x,y,z) = (a,b,c)$ seja possível e indeterminada, uma vez que T é injectiva.

12. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz $M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})$ que a representa em relação à base (ordenada) $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ com

$$v_1 = (1,1,1), \quad v_2 = (1,1,0), \quad v_3 = (1,0,0),$$

é dada por

$$M(T;\mathcal{B};\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(i) Seja $A = M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})$. Seja $u \in \mathbb{R}^3$ e sejam $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ as coordenadas de u em relação à base $\mathcal{B}$. Tem-se

$$u \in \mathcal{N}(T) \Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathcal{N}(A)$$

e como

$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = \{(-2y, y, 0) : y \in \mathbb{R}\} = L(\{(-2,1,0)\}),$$

$$\mathcal{N}(T) = L(\{(-2)(1,1,1) + 1(1,1,0) + 0(1,0,0)\}) = L(\{(1,1,2)\}).$$

O conjunto $\{(1,1,2)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$ pois gera $\mathcal{N}(T)$ e é linearmente independente. Assim, $\dim \mathcal{N}(T) = 1$. T não é injectiva, uma vez que $\mathcal{N}(T) \neq \{(0,0,0)\}$.

Como

$$\dim \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{espaço de partida}} = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T),$$

então $\dim \mathcal{I}(T) = 2$ e assim $\mathcal{I}(T) \neq \mathbb{R}^3$ (pois $\dim \mathbb{R}^3 = 3$), isto é, T não é sobrejectiva.

Expressão geral de T:

$$T(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} =$$

$$= (8x - 2y - 3z, 6x - 3z, 2x - z).$$

Cálculo alternativo de $\mathcal{N}(T)$: Tem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(T) &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (0,0,0)\right\} = \\
&= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (8x - 2y - 3z, 6x - 3z, 2x - z) = (0,0,0)\right\} = \\
&= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2x \quad \text{e} \quad x = y\right\} \\
&= \left\{(x,x,2x) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\right\} = \\
&= L\left(\{(1,1,2)\}\right).
\end{aligned}$$

(ii) Quanto ao contradomínio:

$$\mathcal{I}(T) = L\left(\{T(1,1,1), T(1,1,0), T(1,0,0)\}\right) =$$

$$= L(\{1(1,1,1) + 2(1,1,0) + 0(1,0,0), 2(1,1,1) +$$

$$+4(1,1,0) + 0(1,0,0), 2(1,1,1) + 4(1,1,0) + 2(1,0,0)\}) =$$

$$= L\left(\{(3,3,1), (6,6,2), (8,6,2)\}\right) = L\left(\{(6,6,2), (8,6,2)\}\right) = L\left(\{(8,6,2), (-2,0,0)\}\right).$$

Como o conjunto $\{(8,6,2), (-2,0,0)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{I}(T)$ então

$$\{(8,6,2), (-2,0,0)\}$$

é uma base de $\mathcal{I}(T)$ e tem-se $\dim \mathcal{I}(T) = 2$.

Cálculo alternativo de $\mathcal{I}(T)$: Tem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(T) &= \{(8x - 2y - 3z, 6x - 3z, 2x - z) : x,y,z \in \mathbb{R}\} = \\
&= L\left(\{(8,6,2), (-2,0,0), (-3,-3,-1)\}\right) = \\
&= L\left(\{(8,6,2), (-2,0,0)\}\right) = \mathcal{C}\left(M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)\right).
\end{aligned}$$

(iii) É fácil ver que $(2,4,0) \notin \mathcal{I}(T)$. Logo, a equação linear $T(x,y,z) = (2,4,0)$ não tem soluções.

(iv) Tem-se $T(1,1,1) = 1(1,1,1) + 2(1,1,0) + 0(1,0,0) = (3,3,1)$ e assim

$$T\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \left(-1, -1, -\frac{1}{3}\right)$$

Logo, a solução geral de

$$T(x,y,z) = \left(-1, -1, -\frac{1}{3}\right)$$

é dada por:

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = \left(-1,-1,-\frac{1}{3}\right)\right\} = \left\{\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right\} + \mathcal{N}(T) =$$

$$= \left\{\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)) + s(1,1,2) : s \in \mathbb{R}\right\}.$$

(v) Por exemplo o vector $(1,0,0)$ ou qualquer vector $(a,b,c) \in \mathcal{I}(T)$, uma vez que sendo T não injectiva, sempre que a equação linear fôr possível, ela será indeterminada.

(vi) Tem-se

$$T(v_1) = (1,1,1) + 2(1,1,0) + 0(1,0,0) = (3,3,1),$$
$$T(v_2) = 2(1,1,1) + 4(1,1,0) + 0(1,0,0) = (6,6,2)$$

e

$$T(v_3) = 2(1,1,1) + 4(1,1,0) + 2(1,0,0) = (8,6,2).$$

Logo,

$$T(1,0,0) = T(v_3) = (8,6,2),$$
$$T(0,1,0) = T(v_2) - T(v_3) = (-2,0,0)$$

e

$$T(0,0,1) = T(v_1) - T(v_2) = (-3,-3,-1).$$

Assim,

$$M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 8 & -2 & -3 \\ 6 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e deste modo, para $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$T(x,y,z) = M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -2 & -3 \\ 6 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} =$$
$$= (8x - 2y - 3z, 6x - 3z, 2x - z).$$

13. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y,z) = (x + y + z, x + 2y - 4z, z).$$

(i) Tendo em conta que $T(1,0,0) = (1,1,0)$, $T(0,1,0) = (1,2,0)$ e $T(0,0,1) = (1,-4,1)$, tem-se

$$M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que representa T em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^3$ de $\mathbb{R}^3$.

(ii) A matriz $M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)$ é invertível pois

$$M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, T é injectiva e como tal invertível, tendo-se

$$\left(M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)\right)^{-1} = M(T^{-1};\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3).$$

Determinemos $(M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3))^{-1}$.

$$\begin{aligned}\left[M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)\mid I\right] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -5 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \to \\ &\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -6\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right].\end{aligned}$$

Logo,

$$\left(M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -6\\ -1 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

e como tal, para $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}T^{-1}(x,y,z) = \left(M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)\right)^{-1}\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & -6\\ -1 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \\ &= (2x-y-6z,-x+y+5z,z).\end{aligned}$$

Observação: $T^{-1}\circ T = T\circ T^{-1} = I$. Isto é, para qualquer $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,

$$\left(T^{-1}\circ T\right)(x,y,z) = \left(T\circ T^{-1}\right)(x,y,z) = (x,y,z),$$

como se pode ver:

$$\begin{aligned}\left(T^{-1}\circ T\right)(x,y,z) &= T^{-1}\left(T(x,y,z)\right) = T^{-1}(x+y+z,x+2y-4z,z) = \\ &= (2x+2y+2z-x-2y+4z-6z,-x-y-z+x+2y-4z+5z,z) = \\ &= (x,y,z);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(T\circ T^{-1}\right)(x,y,z) &= T\left(T^{-1}(x,y,z)\right) = T(2x-y-6z,-x+y+5z,z) = \\ &= (2x-y-6z-x+y+5z+z,2x-y-6z-2x+2y+10z-4z,z) = \\ &= (x,y,z).\end{aligned}$$

Demonstração alternativa da injectividade de T: Tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(T) &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (0,0,0)\right\} = \\ &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x+y+z,x+2y-4z,z) = (0,0,0)\right\} = \\ &= \left\{(0,0,0)\right\}.\end{aligned}$$

Logo, T é injectiva.

(iii) Sendo T injectiva, como os espaços de partida e de chegada têm a mesma dimensão, então T é sobrejectiva. Logo, T é linear e bijectiva, isto é, T é um isomorfismo.

(iv) Tem-se

$$T(x,y,z) = (1,1,2) \Leftrightarrow (x,y,z) = T^{-1}(1,1,2) = (-11,10,2).$$

Logo, a solução geral da equação linear $T(x,y,z) = (1,1,2)$ é: $\{(-11,10,2)\}$.

14. Seja

$$\mathcal{B}_c^{2\times 2} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

a base canónica (ordenada) de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Considere a transformação

$$T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \text{ definida por } T(X) = AX - XA, \quad \text{com} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(i) Sejam $X, X_1, X_2 \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Tem-se

$$\begin{aligned} T(X_1 + X_2) &= A(X_1 + X_2) - (X_1 + X_2)A = AX_1 + AX_2 - X_1A - X_2A = \\ &= AX_1 - X_1A + AX_2 - X_2A = T(X_1) + T(X_2) \end{aligned}$$

e

$$T(\lambda X) = A(\lambda X) - (\lambda X)A = \lambda\,(AX - XA) = \lambda T(X).$$

(ii) Seja $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Tem-se

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b+c & d-a \\ d-a & -b-c \end{bmatrix}.$$

Logo, a expressão geral de T é dada por:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} b+c & d-a \\ d-a & -b-c \end{bmatrix}.$$

(iii) Tem-se

$$M(T; \mathcal{B}_c^{2\times 2}; \mathcal{B}_c^{2\times 2}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

uma vez que

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(iv) Tem-se

$$\mathcal{N}(T)=\left\{X=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}):T(X)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}):a,b\in\mathbb{R}\right\}=L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

Logo, $\dim\mathcal{N}(T)=2$. Como $\mathcal{N}(T)\neq\left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ então T não é injectiva.

(v) Atendendo a que $\dim\mathcal{N}(T)=2$ e $\dim\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})=4$, então $\dim\mathcal{I}(T)=2$. T não é sobrejectiva uma vez que $\mathcal{I}(T)\neq\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Determinemos uma base para $\mathcal{I}(T)$. Tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(T) &= \left\{T(X):X=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})\right\}= \\ &= \left\{\begin{bmatrix} b+c & d-a \\ -a+d & -b-c \end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}):a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}= \\ &= L\left(\left\{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}\right)= \\ &= L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}\right).\end{aligned}$$

Como o conjunto $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ gera $\mathcal{I}(T)$ e é linearmente independente, então é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

15. Considere as transformações lineares $T_1,T_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definidas respectivamente por

$$T_1(x,y)=(x+y,x-y)\quad\text{e}\quad T_2(x,y)=(2x+y,x-2y).$$

(i) Tem-se

$$M(T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

e

$$M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

uma vez que $T_1(1,0)=(1,1)$, $T_1(0,1)=(1,-1)$, $T_2(1,0)=(2,1)$ e $T_2(0,1)=(1,-2)$.

(ii) A matriz $M(T_2\circ T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)$ que representa $T_2\circ T_1$ em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^2$, é dada por

$$\begin{aligned}M(T_2\circ T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2) &= M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)M(T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)= \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

(iii) Tem-se, para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
(T_2 \circ T_1)(x, y) &= M(T_2 \circ T_1; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (3x + y, -x + 3y).
\end{aligned}$$

(iv) Tem-se, para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
T_1(x, y) &= M(T_1; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (x + y, x - y)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
T_2(x, y) &= M(T_2; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (2x + y, x - 2y).
\end{aligned}$$

Logo,

$$(T_2 \circ T_1)(x, y) = T_2\left(T_1(x, y)\right) = T_2(x + y, x - y) =$$
$$= (2x + 2y + x - y, x + y - 2x + 2y) = (3x + y, -x + 3y).$$

(v) Tem-se

$$\mathcal{N}(T_1) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T(x, y) = (0, 0)\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + y, x - y) = (0, 0)\right\} = \{(0, 0)\}$$

e

$$\mathcal{N}(T_2) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T(x, y) = (0, 0)\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (2x + y, x - 2y) = (0, 0)\right\} = \{(0, 0)\}.$$

Logo, T_1 e T_2 são injectivas e como tal são invertíveis.

(vi) Tem-se então

$$\left(M(T_1; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2)\right)^{-1} = M(T_1^{-1}; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2) \quad \text{e} \quad \left(M(T_2; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2)\right)^{-1} = M(T_2^{-1}; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2)$$

Determinemos $(M(T_1; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2))^{-1}$ e $(M(T_2; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2))^{-1}$.

$$\begin{aligned}
\left[M(T_1; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2) \mid I\right] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right] \to \\
&\to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\mid I\right] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right] \to \\ &\to \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 4/5 & 2/5 \\ 0 & -5/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 1/5 & -2/5 \end{array}\right].\end{aligned}$$

Logo,

$$\left(M(T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \left(M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{bmatrix}$$

e como tal, para $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$T_1^{-1}(x,y) = \left(M(T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\right)^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y\right),$$

$$T_2^{-1}(x,y) = \left(M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\right)^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left(\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}y, \frac{1}{5}x-\frac{2}{5}y\right),$$

e finalmente

$$\begin{aligned}\left(T_1^{-1}\circ T_2^{-1}\right)(x,y) &= T_1^{-1}\left(T_2^{-1}(x,y)\right) = \\ &= T_1^{-1}\left(\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}y, \frac{1}{5}x-\frac{2}{5}y\right) = \\ &= \left(\frac{3}{10}x-\frac{1}{10}y, \frac{1}{10}x+\frac{3}{10}y\right).\end{aligned}$$

(vii) Tem-se

$$M((T_2\circ T_1)^{-1};\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2) = M(T_1^{-1}\circ T_2^{-1};\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2) = M(T_1^{-1};\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)M(T_2^{-1};\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2) =$$

$$= \left(M(T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\right)^{-1}\left(M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/10 & -1/10 \\ 1/10 & 3/10 \end{bmatrix}.$$

De facto,

$$M((T_2\circ T_1)^{-1};\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 3/10 & -1/10 \\ 1/10 & 3/10 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \left(M(T_2\circ T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\right)^{-1}.$$

(viii) Tendo em conta **(vii)** tem-se

$$(T_2\circ T_1)^{-1}(x,y) = \begin{bmatrix} 3/10 & -1/10 \\ 1/10 & 3/10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left(\frac{3}{10}x-\frac{1}{10}y, \frac{1}{10}x+\frac{3}{10}y\right).$$

Logo, como seria de esperar,

$$(T_2\circ T_1)^{-1}(x,y) = \left(T_1^{-1}\circ T_2^{-1}\right)(x,y).$$

16. Seja $A = M\left(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2\right)$. Como $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ é invertível, pois $\det A = 1 \neq 0$, T é injectiva. Logo, se a equação linear $T(x,y) = (1,2)$ tiver solução, ela é única. Como $\mathcal{C}\left(A\right) = \mathcal{I}\left(T\right)$ e uma vez que $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}(A)$ pois: $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, então $(1,0)$ é a solução única da equação linear $T(x,y) = (1,2)$.

Resolução alternativa da equação linear $T(x,y) = (1,2)$:

Como A é invertível, T é invertível e

$$T(x,y) = (1,2) \Leftrightarrow (x,y) = T^{-1}(1,2) = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

17. Tem-se $M\left(T_1; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^1\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, pois $T_1(1,0) = 1$ e $T_1(0,1) = 0$. Logo

$$M\left(T_2 \circ T_1; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2\right) = M\left(T_2; \mathcal{B}_c^1; \mathcal{B}_c^2\right) M\left(T_1; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^1\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e assim $\mathcal{N}(T_2 \circ T_1) = \mathcal{N}(M\left(T_2 \circ T_1; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2\right)) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(0,1)\}\right)$. Pelo que $\{(0,1)\}$ é base de $\mathcal{N}(T_2 \circ T_1)$, uma vez que $\{(0,1)\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{N}(T_2 \circ T_1)$.

18. Como $M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, tem-se $T(1,0,1) = 1(1,1) - (0,1) = (1,0)$,

$T(0,1,1) = 0(1,1) + 0(0,1) = (0,0)$ e $T(1,0,1) = 1(1,1) - (0,1) = (1,0)$. Por outro lado, como $\mathcal{B}_1 = \{(1,0,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$ gera o "espaço de partida" $\mathbb{R}^3$, tem-se

$$\mathcal{I}(T) = L\left(\{T(1,0,1), T(0,1,1), T(0,0,1)\}\right) = L\left(\{(1,0)\}\right).$$

Pelo que $\{(1,0)\}$ é base de $\mathcal{I}(T)$, pois $(1,0)$ é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T)$.

Tem-se $\dim \mathcal{I}(T) = \operatorname{car}(M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2)) = \operatorname{car}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1$. Como $\mathcal{I}(T) \neq \mathbb{R}^2$, pois $\dim \mathcal{I}(T) = 1 \neq 2 = \dim \mathbb{R}^2$, então T não é sobrejectiva.

19. Considere a transformação linear $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T_1(x,y,z) = (2x+y, y+2z)$. Considere ainda a transformação linear $T_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuja representação matricial em relação à base (ordenada) $\mathcal{B} = \{(2,1), (1,2)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e à base canónica $\mathcal{B}_c^3$ de $\mathbb{R}^3$ é dada pela matriz $M(T_2; \mathcal{B}; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(i)

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(T_1) &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T_1(x,y,z) = (0,0)\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (2x+y, y+2z) = (0,0)\right\} = \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z = -\frac{y}{2}\right\} = \left\{\left(-\frac{y}{2}, y, -\frac{y}{2}\right) : y \in \mathbb{R}\right\} = L\left(\{(1,-2,1)\}\right). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(1,-2,1)\}$ gera $\mathcal{N}(T_1)$ e é linearmente independente, logo é uma base de $\mathcal{N}(T_1)$. Tem-se

$$\dim \mathcal{N}(T_1) = 1 \quad \text{e} \quad \dim \mathcal{N}(T_1) + \dim \mathcal{I}(T_1) = \dim \mathbb{R}^3,$$

e assim $\dim \mathcal{I}(T_1) = 2$. Logo, como $\mathcal{I}(T_1)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^2$ e $\dim \mathcal{I}(T_1) = \dim \mathbb{R}^2 = 2$, então $\mathcal{I}(T_1) = \mathbb{R}^2$ e assim, T_1 é sobrejectiva.

(ii) Como $\mathcal{B} = \{(2,1),(1,2)\}$ gera o "espaço de partida" $\mathbb{R}^2$, tem-se

$$\mathcal{I}(T_2) = L(\{T_2(2,1), T_2(1,2)\}) = L(\{(2,1,1),(1,1,2)\}).$$

Como o conjunto $\{(2,1,1),(1,1,2)\}$ gera $\mathcal{I}(T_2)$ e é linearmente independente, então é uma base de $\mathcal{I}(T_2)$.

Tem-se

$$\dim \mathcal{I}(T_2) = 2 \quad \text{e} \quad \dim \mathcal{N}(T_2) + \dim \mathcal{I}(T_2) = \dim \mathbb{R}^2,$$

e assim $\dim \mathcal{N}(T_2) = 0$. Logo, T_2 é injectiva.

(iii) Tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{-2L_1+L_2\to L_2 \\ -L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \underset{-\frac{3}{5}L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} \end{bmatrix}$$

logo o conjunto $\{(1,-2,1),(2,1,1),(1,1,2)\}$ gera $\mathcal{N}(T_1) + \mathcal{I}(T_2)$ e é linearmente independente, então é uma base de $\mathcal{N}(T_1) + \mathcal{I}(T_2)$.

Logo, como $\mathcal{N}(T_1) + \mathcal{I}(T_2)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ e $\dim(\mathcal{N}(T_1) + \mathcal{I}(T_2)) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$, então $\mathcal{N}(T_1) + \mathcal{I}(T_2) = \mathbb{R}^3$.

Tem-se

$$\dim(\mathcal{N}(T_1) \cap \mathcal{I}(T_2)) = \dim \mathcal{N}(T_1) + \dim \mathcal{I}(T_2) - \dim(\mathcal{N}(T_1) + \mathcal{I}(T_2)) = 1 + 2 - 3 = 0.$$

(iv) Como $(1,0) = \frac{2}{3}(2,1) - \frac{1}{3}(1,2)$ e $(0,1) = -\frac{1}{3}(2,1) + \frac{2}{3}(1,2)$, tem-se

$$\begin{aligned} T_2(1,0) &= T_2\left(\frac{2}{3}(2,1) - \frac{1}{3}(1,2)\right) \underset{T \text{ é linear}}{=} \frac{2}{3}T_2(2,1) - \frac{1}{3}T_2(1,2) = \\ &= \frac{2}{3}(2,1,1) - \frac{1}{3}(1,1,2) = \left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right) = \left(1,\frac{1}{3},0\right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T_2(0,1) &= T_2\left(-\frac{1}{3}(2,1) + \frac{2}{3}(1,2)\right) \underset{T \text{ é linear}}{=} -\frac{1}{3}T_2(2,1) + \frac{2}{3}T_2(1,2) = \\ &= -\frac{1}{3}(2,1,1) + \frac{2}{3}(1,1,2) = \left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right) = \left(0,\frac{1}{3},1\right) \end{aligned}$$

Logo, a matriz $M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^3)$ que representa T_2 em relação às bases canónicas $\mathcal{B}_c^2$ e $\mathcal{B}_c^3$ de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ respectivamente, é dada por

$$M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(v) A matriz $M(T_1;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2)$ que representa T_1 em relação às bases canónicas $\mathcal{B}_c^3$ e $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ respectivamente, é dada por

$$M(T_1;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

uma vez que

$$T_1(1,0,0) = (2,0), \quad T_1(0,1,0) = (1,1) \quad \text{e} \quad T_1(0,0,1) = (0,2).$$

Logo, a matriz que representa $T_1 \circ T_2$ em relação à base canónica $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^2$ é dada por

$$M(T_1 \circ T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2) = M(T_1;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2)M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/3 & 1/3 \\ 1/3 & 7/3 \end{bmatrix}.$$

Logo, tem-se

$$(T_1 \circ T_2)(x,y) = \begin{bmatrix} 7/3 & 1/3 \\ 1/3 & 7/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Assim, como a matriz $\begin{bmatrix} 7/3 & 1/3 \\ 1/3 & 7/3 \end{bmatrix}$ é invertível, a solução geral da equação $(T_1 \circ T_2)(x,y) = \begin{bmatrix} 8/3 \\ 8/3 \end{bmatrix}$, é dada

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/3 & 1/3 \\ 1/3 & 7/3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 8/3 \\ 8/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/16 & -1/16 \\ -1/16 & 7/16 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8/3 \\ 8/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

20. Considere a transformação linear $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T_1(x,y) = (2x+y, 0, x+2y)$. Considere ainda a transformação linear $T_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuja representação matricial em relação à base (ordenada) $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e à base canónica $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^2$ é dada pela matriz:

$$M(T_2;\mathcal{B};\mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(i) $T_2(0,1,0) = T_2(1,1,0) - T_2(1,0,0) = (-1,1) - (1,-1) = (-2,2)$.
$T_2(0,0,1) = T_2(1,1,1) - T_2(1,1,0) = (1,-1) - (-1,1) = (2,-2)$.

(ii) Tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(T_1) &= \left\{T_1(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{(2x+y,0,x+2y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \\ &= \{x(2,0,1) + y(1,0,2) : x,y \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(2,0,1),(1,0,2)\}\right). \end{aligned}$$

Como o conjunto $\{(2,0,1),(1,0,2)\}$ gera $\mathcal{I}(T_1)$ e é linearmente independente, então é uma base de $\mathcal{I}(T_1)$.

Como $\dim \mathcal{I}(T_1) = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$ então $\mathcal{I}(T_1) \neq \mathbb{R}^3$ e assim, T_1 não é sobrejectiva.

(iii)

$$\mathcal{N}\left(M(T_2;\mathcal{B};\mathcal{B}_c^2)\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \{(y-z,y,z) : y,z \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(1,1,0),(-1,0,1)\}\right).$$

Como os vectores $(1,1,0)$ e $(-1,0,1)$ são as coordenadas na base $\mathcal{B}$ de vectores que geram o núcleo de T_2, tem-se

$$1(1,1,1) + 1(1,1,0) + 0(1,0,0) = (2,2,1)$$

e

$$-1(1,1,1) + 0(1,1,0) + 1(1,0,0) = (0,-1,-1)$$

Como o conjunto $\{(2,2,1),(0,-1,-1)\}$ gera $\mathcal{N}(T_2)$ e é linearmente independente, então é uma base de $\mathcal{N}(T_2)$. Como $\mathcal{N}(T_2) \neq \{\mathbf{0}\}$ então T_2 não é injectiva.

(iv) Pela definição de $M(T_2;\mathcal{B};\mathcal{B}_c^2)$ tem-se $T_2(1,0,0) = (1,-1)$. Atendendo à alínea **a)**, tem-se $T_2(0,1,0) = (-2,2)$ e $T_2(0,0,1) = (2,-2)$. Logo, a matriz $M(T_2;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2)$ que representa T_2 em relação às bases canónicas $\mathcal{B}_c^3$ e $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ respectivamente, é dada por

$$M(T_2;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, como $T_1(1,0) = (2,0,1)$ e $T_1(0,1) = (1,0,2)$. Logo, a matriz $M(T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^3)$ que representa T_1 em relação às bases canónicas $\mathcal{B}_c^2$ e $\mathcal{B}_c^3$ de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ respectivamente, é dada por

$$M(T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Logo, a matriz que representa $T_2 \circ T_1$ em relação à base canónica $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^2$ é dada por

$$M(T_2 \circ T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2) = M(T_2;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2)M(T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}.$$

Logo, tem-se

$$(T_2 \circ T_1)(x,y) = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

e assim,

$$(T_2 \circ T_1)(x,y) = (-1,1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A solução geral de $(T_2 \circ T_1)(x,y) = (-1,1)$ é dada por:

$$\left(\text{Solução particular de } \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + \left(\text{Solução geral de } \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right).$$

Como o vector $\left(-\frac{1}{4},0\right)$ é uma solução particular de $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e

$$\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = L\left(\left\{\left(-\frac{5}{4},1\right)\right\}\right)$$

então, a solução geral de $(T_2 \circ T_1)(x,y) = (-1,1)$ é dada por:

$$\left(-\frac{1}{4},0\right) + \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}\right) = \left\{\left(-\frac{1}{4},0\right) + s\left(-\frac{5}{4},1\right) : s \in \mathbb{R}\right\}.$$

21. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_3$ definida por

$$T(1,1,-1) = 2 + 2t^2, \quad T(1,-1,1) = -t - t^3 \quad \text{e} \quad T(-1,1,1) = 2 + t + 2t^2 + t^3.$$

(i) Determinemos a expressão geral de T, isto é, determinemos $T(x,y,z)$ para qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Seja $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Como $\{(1,1,-1),(1,-1,1),(-1,1,1)\}$ gera $\mathbb{R}^3$, existem escalares $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$(x,y,z) = \alpha(1,1,-1) + \beta(1,-1,1) + \gamma(-1,1,1).$$

Atendendo a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ 1 & -1 & 1 & y \\ -1 & 1 & 1 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ 0 & -2 & 2 & y-x \\ 0 & 2 & 0 & z+x \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ 0 & -2 & 2 & y-x \\ 0 & 0 & 2 & y+z \end{array}\right],$$

tem-se

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = x \\ -2\beta + 2\gamma = y - x \\ 2\gamma = y + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}(x+y) \\ \beta = \frac{1}{2}(x+z) \\ \gamma = \frac{1}{2}(y+z). \end{cases}$$

Logo

$$(x,y,z) = \frac{1}{2}(x+y)(1,1,-1) + \frac{1}{2}(x+z)(1,-1,1) + \frac{1}{2}(y+z)(-1,1,1),$$

e assim, como T é linear,

$$T(x,y,z) = \frac{1}{2}(x+y)\,T(1,1,-1) + \frac{1}{2}(x+z)\,T(1,-1,1) + \frac{1}{2}(y+z)\,T(-1,1,1) =$$

$$= \frac{1}{2}(x+y)\left(2+2t^2\right) + \frac{1}{2}(x+z)\left(-t-t^3\right) + \frac{1}{2}(y+z)\left(2+t+2t^2+t^3\right) =$$

$$= x + 2y + z + \frac{1}{2}(y-x)\,t + (x+2y+z)\,t^2 + \frac{1}{2}(y-x)\,t^3.$$

(ii) Tem-se

$$\mathcal{N}(T) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = \mathbf{0}\right\} =$$

$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z + \frac{1}{2}(y-x)\,t + (x+2y+z)\,t^2 + \frac{1}{2}(y-x)\,t^3 = 0 + 0t + 0t^2 + 0t^3\right\} =$$

$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}(y-x) = 0\right\} =$$

$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y \quad \text{e} \quad z = -3y\right\} = \left\{y(1,1,-3) \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R}\right\} = L\left(\{(1,1,-3)\}\right)$$

Logo, o conjunto $\{(1,1,-3)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$ e $\dim \mathcal{N}(T) = 1$. T não é injectiva, uma vez que $\mathcal{N}(T) \neq \{(0,0,0)\}$.

(iii) Determine, se possível, uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{I}(T)$. Diga se T é sobrejectiva.

Como $\{(1,1,-1),(1,-1,1),(-1,1,1)\}$ gera $\mathbb{R}^3$, tem-se

$$\mathcal{I}(T) = L\left(\{T(1,1,-1), T(1,-1,1), T(-1,1,1)\}\right) = L\left(\left\{2+2t^2, -t-t^3, 2+t+2t^2+t^3\right\}\right).$$

Como:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

então o conjunto $\{2+2t^2, -t-t^3\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T)$, sendo assim uma base de $\mathcal{I}(T)$.

Logo, tem-se $\dim \mathcal{I}(T) = 2$.

Por outro lado, como $\mathcal{I}(T)$ é subespaço de $\mathcal{P}_3$ e $\dim \mathcal{P}_3 = 4$ então $\mathcal{I}(T) \neq \mathcal{P}_3$, isto é, T não é sobrejectiva.

(iv) Atendendo a ter-se

$$T(1,1,-1) = 2+2t^2, \quad T(1,-1,1) = -t-t^3 \quad \text{e} \quad T(-1,1,1) = 2+t+2t^2+t^3.$$

$$1+t+t^2+t^3 = \underbrace{2+t+2t^2+t^3}_{=T(-1,1,1)} - \frac{1}{2}\underbrace{(2+2t^2)}_{=T(1,1,-1)} = T(-1,1,1) - \frac{1}{2}T(1,1,-1) \underset{T \text{ é linear}}{=}$$

$$= T\left((-1,1,1) - \frac{1}{2}(1,1,-1)\right) = T\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right),$$

$\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ é uma solução particular da equação linear $T(x,y,z) = 1+t+t^2+t^3$.

Como, a solução geral de $T(x,y,z) = 1+t+t^2+t^3$ é dada por:

$$\left(\text{Solução particular de } T(x,y,z) = 1+t+t^2+t^3\right) + \left(\text{Solução geral de } T(x,y,z) = \mathbf{0}\right)$$

e como a solução geral de $T(x,y,z) = \mathbf{0}$ é dada por

$$\mathcal{N}(T) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = \mathbf{0}\right\} = L\left(\{(1,1,-3)\}\right)$$

então, a solução geral de $T(x,y,z) = 1+t+t^2+t^3$ é dada por:

$$\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) + L\left(\{(1,1,-3)\}\right) = \left\{\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) + s(1,1,-3) : s \in \mathbb{R}\right\}.$$

22. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Considere a transformação linear $T_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2$ definida por

$$T_\lambda(x,y,z) = z - y + \lambda(y-x)t + xt^2.$$

(i) Tem-se

$$\mathcal{N}(T_\lambda) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T_\lambda(x,y,z) = \mathbf{0}\right\} =$$

$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z - y + \lambda\,(y-x)\,t + xt^2 = 0 + 0t + 0t^2 + 0t^3\right\} =$$

$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = y \quad \text{e} \quad (y = x \ \text{ ou } \ \lambda = 0) \quad \text{e} \quad x = 0\right\} =$$

$$= \left\{(0,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = y \quad \text{e} \quad (y = 0 \ \text{ ou } \ \lambda = 0)\right\} =$$

$$= \begin{cases} \{(0,0,0)\} & \text{se} \quad \lambda \neq 0 \\ \\ \{y(0,1,1) \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R}\} & \text{se} \quad \lambda = 0 \end{cases} = \begin{cases} \{(0,0,0)\} & \text{se} \quad \lambda \neq 0 \\ \\ L\left(\{(0,1,1)\}\right) & \text{se} \quad \lambda = 0 \end{cases}$$

Logo, se $\lambda = 0$ então $\{(0,1,1)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T_0)$ e assim T_0 não é injectiva.

$$\dim \mathcal{N}(T_\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \lambda \neq 0 \\ \\ 1 & \text{se} \quad \lambda = 0. \end{cases}$$

Logo, como $\mathcal{N}(T_\lambda) = \{(0,0,0)\}$, para todo o $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, então T_λ é injectiva, para todo o $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

(ii) Seja $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, tem-se

$$T_\lambda(x,y,z) = z - y + \lambda\,(y-x)\,t + xt^2 = z + x\left(-\lambda t + t^2\right) + y\,(-1 + \lambda t)$$

Logo,

$$\mathcal{I}(T_\lambda) = \left\{T_\lambda(x,y,z) : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\} = \left\{z + x\left(-\lambda t + t^2\right) + y\,(-1+\lambda t) : x,y,z \in \mathbb{R}\right\} =$$

$$= L\left(\left\{1, -\lambda t + t^2, -1 + \lambda t\right\}\right) = \begin{cases} L\left(\{1, -\lambda t + t^2, -1 + \lambda t\}\right) & \text{se} \quad \lambda \neq 0 \\ \\ L\left(\{1, t^2\}\right) \quad \text{se} \quad \lambda = 0 \end{cases}$$

Se $\lambda \neq 0$ então o conjunto $\{1, -\lambda t + t^2, -1 + \lambda t\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{I}\,(T_\lambda)$, sendo assim uma base de $\mathcal{I}\,(T_\lambda)$.

Se $\lambda = 0$ então o conjunto $\{1, t^2\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{I}\,(T_0)$, sendo assim uma base de $\mathcal{I}\,(T_0)$.

Logo

$$\dim \mathcal{I}(T_\lambda) = \begin{cases} 3 & \text{se} \quad \lambda \neq 0 \\ \\ 2 & \text{se} \quad \lambda = 0. \end{cases}$$

Como $\mathcal{I}\,(T_\lambda)$ é um subespaço de $\mathcal{P}_2$ e neste caso $(\lambda \neq 0)$ $\dim \mathcal{I}\,(T_\lambda) = \dim \mathcal{P}_2$, então $\mathcal{I}\,(T_\lambda) = \mathcal{P}_2$, isto é, T_λ é sobrejectiva se $\lambda \neq 0$.

Se $\lambda = 0$, como $\mathcal{I}\,(T_0) \neq \mathcal{P}_3$, T_0 não é sobrejectiva.

Note que: para todo o $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\dim \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{espaço de partida}} = \dim \mathcal{N}(T_\lambda) + \dim \mathcal{I}(T_\lambda),$$

(iii) Considere $\lambda = 0$ e resolva a equação linear $T_0(x, y, z) = 1 + t^2$.Atendendo a ter-se

$$T_0(1, 0, 1) = 1 + t^2$$

então $(1, 0, 1)$ é uma solução particular da equação linear $T_0(x, y, z) = 1 + t^2$.

Como, a solução geral de $T_0(x, y, z) = 1 + t^2$ é dada por:

$$\left(\text{Solução particular de } T_0(x, y, z) = 1 + t^2\right) + (\text{Solução geral de } T_0(x, y, z) = \mathbf{0})$$

e como a solução geral de $T_0(x, y, z) = \mathbf{0}$ é dada por

$$\mathcal{N}(T_0) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : T_0(x, y, z) = \mathbf{0}\right\} = L\left(\{(0, 1, 1)\}\right)$$

então, a solução geral de $T_0(x, y, z) = 1 + t^2$ é dada por:

$$(1, 0, 1) + L\left(\{(0, 1, 1)\}\right) = \{(1, 0, 1) + s(0, 1, 1) : s \in \mathbb{R}\}.$$

23. Considere o espaço linear $\mathcal{P}_2$ dos polinómios reais de variável real e de grau menor ou igual a 2. Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por

$$T\left(p\left(t\right)\right) = p'\left(t\right) - 2p\left(t\right),$$

onde $p'\left(t\right)$ é a derivada de primeira ordem de $p\left(t\right)$.

(i) Seja $p\left(t\right) \in \mathcal{P}_2$. $p\left(t\right) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, com $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Tem-se

$$T\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right) = \left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right)' - 2\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right) =$$

$$= a_1 + 2a_2 t - 2a_0 - 2a_1 t - 2a_2 t^2 = -2a_0 + a_1 + (2a_2 - 2a_1)\,t - 2a_2 t^2.$$

Logo, a expressão geral de $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ é dada por:

$$T\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right) = -2a_0 + a_1 + (2a_2 - 2a_1)\,t - 2a_2 t^2.$$

(ii) Seja $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ a base canónica (ordenada) de $\mathcal{P}_2$. Determinemos a matriz $M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})$ que representa T em relação à base $\mathcal{B}$.

Como

$$T\left(1\right) = 0 - 2 = -2, \qquad T\left(t\right) = 1 - 2t, \qquad T\left(t^2\right) = 2t - 2t^2$$

tem-se

$$M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(iii) Como a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ é invertível, pois $M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})$ é invertível então T é linear e bijectiva, isto é, T é um isomorfismo. Sendo T um isomorfismo, T^{-1} também é um isomorfismo.

Seja $p\left(t\right) \in \mathcal{P}_2$. $p\left(t\right) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, com $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

Tem-se

$$-\frac{1}{2}p(t)-\frac{1}{4}p'(t)-\frac{1}{8}p''(t)=-\frac{1}{2}\left(a_0+a_1t+a_2t^2\right)-\frac{1}{4}\left(a_1+2a_2t\right)-\frac{1}{8}2a_2=$$

$$=-\frac{1}{2}a_0-\frac{1}{4}a_1-\frac{1}{4}a_2+\left(-\frac{1}{2}a_1-\frac{1}{2}a_2\right)t-\frac{a_2}{2}t^2 \qquad (*)$$

e

$$(M(T;\mathcal{B};\mathcal{B}))^{-1}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1&0\\0&-2&2\\0&0&-2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}a_0-\frac{1}{4}a_1-\frac{1}{4}a_2\\-\frac{1}{2}a_1-\frac{1}{2}a_2\\-\frac{1}{2}a_2\end{bmatrix}$$

Logo

$$T^{-1}(p(t))=-\frac{1}{2}a_0-\frac{1}{4}a_1-\frac{1}{4}a_2+\left(-\frac{1}{2}a_1-\frac{1}{2}a_2\right)t-\frac{a_2}{2}t^2 \qquad (**)$$

Atendendo a (*) e a (**) conclui-se que a expressão geral do isomorfismo T^{-1} é dada por

$$T^{-1}(p(t))=-\frac{1}{2}p(t)-\frac{1}{4}p'(t)-\frac{1}{8}p''(t)$$

para todo o $p(t)\in\mathcal{P}_2$.

(iv) Tem-se

$$p'(t)-2p(t)=(2-3t)^2\Leftrightarrow T(p(t))=(2-3t)^2\underset{T\text{ é um isomorfismo}}{\Leftrightarrow}p(t)=T^{-1}\left((2-3t)^2\right)\underset{\text{(ii)}}{=}$$

$$\underset{\text{(ii)}}{=}-\frac{1}{2}\left((2-3t)^2\right)-\frac{1}{4}\left(2(2-3t)(-3)\right)-\frac{1}{8}\left(2(-3)(-3)\right)=-\frac{5}{4}+\frac{3}{2}t-\frac{9}{2}t^2.$$

Logo, $p(t)=-\frac{5}{4}+\frac{3}{2}t-\frac{9}{2}t^2$ é a única solução da equação diferencial linear

$$p'(t)-2p(t)=(2-3t)^2.$$

24. Considere o espaço linear $\mathcal{P}_2$ dos polinómios reais de variável real e de grau menor ou igual a 2. Considere a transformação linear $T:\mathcal{P}_2\to\mathcal{P}_2$ definida por

$$T(p(t))=t^2p''(t)-2p(t),$$

onde $p''(t)$ é a derivada de segunda ordem de $p(t)$.

(i) Seja $p(t)\in\mathcal{P}_2$. $p(t)=a_0+a_1t+a_2t^2$, com $a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}$. Tem-se

$$T\left(a_0+a_1t+a_2t^2\right)=t^2\left(a_0+a_1t+a_2t^2\right)''-2\left(a_0+a_1t+a_2t^2\right)=$$

$$=t^22a_2-2a_0-2a_1t-2a_2t^2=-2a_0-2a_1t.$$

Logo, a expressão geral de $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ é dada por:

$$T\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right) = -2a_0 - 2a_1 t.$$

(ii) Seja $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ a base canónica (ordenada) de $\mathcal{P}_2$. Determinemos a matriz $M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})$ que representa T em relação à base $\mathcal{B}$.

Como

$$T(1) = 0 - 2 = -2, \qquad T(t) = -2t, \qquad T\left(t^2\right) = 2t^2 - 2t^2 = 0$$

tem-se

$$M(T;\mathcal{B};\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(iii) Uma base para $\mathcal{N}(T)$:

Como

$$\mathcal{N}\left(M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(0,0,1)\}\right),$$

então

$$\mathcal{N}(T) = \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : (a_0, a_1, a_2) \in L\left(\{(0,0,1)\}\right)\right\} = L\left(\left\{t^2\right\}\right).$$

Como $\{t^2\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$, $\dim \mathcal{N}(T) = 1$. Logo, T não é injectiva, uma vez que $\dim \mathcal{N}(T) \neq 0$.

Resolução alternativa para encontrar uma base para $\mathcal{N}(T)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(T) &= \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : T\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right) = \mathbf{0}\right\} = \\ &= \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : t^2 2a_2 - 2\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right) = \mathbf{0}\right\} = \\ &= \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : -2a_0 - 2a_1 t = \mathbf{0}\right\} = \\ &= \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_0 = 0 \;\text{ e }\; a_1 = 0\right\} = L\left(\left\{t^2\right\}\right). \end{aligned}$$

Como $\{t^2\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$, $\dim \mathcal{N}(T) = 1$.

Uma base para $\mathcal{I}(T)$:

Como $\{1, t, t^2\}$ gera $\mathcal{P}_2$, tem-se

$$\mathcal{I}(T) = L\left(\left\{T(1), T(t), T\left(t^2\right)\right\}\right) = L\left(\{-2, -2t, 0\}\right) = L\left(\{-2, -2t\}\right).$$

Uma vez que o conjunto $\{-2, -2t\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T)$, então $\{-2, -2t\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$, tendo-se $\dim \mathcal{I}(T) = 2$.

Como $\dim \mathcal{P}_2 = 3$, tem-se $\mathcal{I}(T) \neq \mathcal{P}_2$, pelo que T não é sobrejectiva.

(iv) (a) Resolva, em $\mathcal{P}_2$, a equação diferencial linear $t^2 p''(t) - 2p(t) = 2 - t$.

Como

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}\left(M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})\right) = \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right),$$

uma vez que

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix},$$

então $-1+\dfrac{1}{2}t$ é uma solução particular da equação diferencial linear

$$t^2p''(t) - 2p(t) = 2-t.$$

Como a solução geral de $t^2p''(t) - 2p(t) = 2-t$ é dada por:

$$\big(\text{Solução particular de } t^2p''(t) - 2p(t) = 2-t\big) + \big(\text{Solução geral de } t^2p''(t) - 2p(t) = \mathbf{0}\big)$$

e como a solução geral de $t^2p''(t) - 2p(t) = \mathbf{0}$ é dada por

$$\mathcal{N}(T) = L\left(\left\{t^2\right\}\right),$$

então a solução geral de $t^2p''(t) - 2p(t) = 2-t$ é dada por:

$$-1+\frac{1}{2}t + L\left(\left\{t^2\right\}\right) = \left\{-1+\frac{1}{2}t + at^2 : a \in \mathbb{R}\right\}.$$

(b) Resolva, em $\mathcal{P}_2$, a equação diferencial linear $2tp'(t) - 2p(0) = 2-t$.

Seja $T_1(p(t)) = 2tp'(t) - 2p(0)$, em que $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$, com $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.
Logo

$$T_1(p(t)) = 2tp'(t) - 2p(0) = 2t(a_1 + 2a_2t) - 2a_0 = -2a_0 + 2a_1t + 4a_2t^2$$

Como

$$M(T_1;\mathcal{B};\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T_1(1) = -2$, $T_1(t) = 2t$, $T_1(t^2) = 4t^2$, onde $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ é a base canónica (ordenada) de $\mathcal{P}_2$

Logo

$$2tp'(t) - 2p(0) = 2-t \Leftrightarrow T_1(p(t)) = 2-t \Leftrightarrow M(T_1;\mathcal{B};\mathcal{B})\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\underset{M(T_1;\mathcal{B};\mathcal{B}) \text{ é invertível}}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \left(M(T_1;\mathcal{B};\mathcal{B})\right)^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Isto é, a solução geral de

$$2tp'(t) - 2p(0) = 2 - t$$

é:

$$\left\{-1 - \frac{1}{2}t\right\}.$$

Verificação:

$$T_1\left(-1 - \frac{1}{2}t\right) = 2t\left(-1 - \frac{1}{2}t\right)' - 2\left(-1 - \frac{1}{2}0\right) = 2t\left(-\frac{1}{2}\right) + 2 = 2 - t.$$

Nota importante: Como

$$\dim \mathcal{N}(T_1) = \dim \mathcal{N}(M(T_1; \mathcal{B}; \mathcal{B})) = 0$$

então T_1 é injectiva e tendo-se

$$\dim \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{espaço de partida}} = \dim \mathcal{N}(T_1) + \dim \mathcal{I}(T_1) = \dim \mathcal{I}(T_1),$$

então $\mathcal{I}(T_1) = \mathbb{R}^3$, isto é, T_1 é sobrejectiva e uma base para $\mathcal{I}(T_1)$ é por exemplo

$$\mathcal{B} = \left\{1, t, t^2\right\}$$

a base canónica (ordenada) de $\mathcal{P}_2$.

Cálculo alternativo de uma base de $\mathcal{I}(T_1)$:
Seja $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, com $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Como

$$T_1(p(t)) = T_1\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right) = 2tp'(t) - 2p(0) = -2a_0 + 2a_1 t + 4a_2 t^2$$

então

$$\mathcal{I}(T_1) = \{T_1(p(t)) : p(t) \in \mathcal{P}_2\} = L\left(\left\{-2, 2t, 4t^2\right\}\right).$$

Como $\{1, t, t^2\}$ gera $\mathcal{P}_2$, tem-se

$$\mathcal{I}(T_1) = L\left(\left\{T(1), T(t), T\left(t^2\right)\right\}\right) = L\left(\left\{-2, 2t, 4t^2\right\}\right)$$

e sendo o conjunto $\{-2, 2t, 4t^2\}$ linearmente independente então

$$\left\{-2, 2t, 4t^2\right\}$$

é uma base de $\mathcal{I}(T_1)$, tendo-se

$$\dim \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{espaço de partida}} = \dim \mathcal{N}(T_1) + \dim \mathcal{I}(T_1) = \dim \mathcal{N}(T_1) + 3 \Leftrightarrow \dim \mathcal{N}(T_1) = 0,$$

isto é, T_1 é injectiva.

25. Seja U o subespaço das matrizes simétricas de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, isto é,

$$U = \left\{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A = A^T\right\}.$$

Considere a transformação linear $T : U \to U$ definida por

$$T(A) = AB + BA$$

com $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(i) Seja $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in U$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tem-se

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b & a+c \\ a+c & 2b \end{bmatrix}$$

Logo, a expressão geral de $T : U \to U$ é dada por:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2b & a+c \\ a+c & 2b \end{bmatrix}.$$

(ii) Determinemos uma base para U e a matriz que representa T em relação a essa base. Seja $A \in U$. Tem-se

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$. Como o conjunto

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

gera U e é linearmente independente, então $\mathcal{B}$ é uma base de U. Por outro lado, como

$$\begin{aligned}
T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \\
&= 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

então a matriz que representa T em relação à base $\mathcal{B}$ é dada por:

$$M\left(T;\mathcal{B};\mathcal{B}\right)=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(iii) Uma base para $\mathcal{N}(T)$:
Como

$$\mathcal{N}\left(M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})\right)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)=L\left(\{(1,0,-1)\}\right),$$

então

$$\mathcal{N}\left(T\right)=\left\{A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\in U:(a,b,c)\in L\left(\{(1,0,-1)\}\right)\right\}=L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

Como $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}$ é uma base de $\mathcal{N}\left(T\right)$, $\dim\mathcal{N}\left(T\right)=1$. Logo, T não é injectiva, uma vez que $\dim\mathcal{N}\left(T\right)\neq 0$.

Resolução alternativa para encontrar uma base para $\mathcal{N}(T)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}\left(T\right) &= \left\{A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\in U:T\left(A\right)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}= \\
& \left\{A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\in U:A\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} \\
&= \left\{A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\in U:\begin{bmatrix} 2b & a+c \\ a+c & 2b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}= \\
&= \left\{A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\in U:2b=0 \quad \text{e} \quad a+c=0\right\}= \\
&= \left\{A=\begin{bmatrix} -c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}:c\in\mathbb{R}\right\}=L\left(\left\{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}\right)=L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}\right).
\end{aligned}$$

Como $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}$ é uma base de $\mathcal{N}\left(T\right)$, $\dim\mathcal{N}\left(T\right)=1$.

Uma base para $\mathcal{I}(T)$:

Como $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ gera U, tem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}\left(T\right) &= L\left(\left\{T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right),T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right),T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\right\}\right)= \\
&= L\left(\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}\right)= \\
&= L\left(\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right\}\right).
\end{aligned}$$

Uma vez que o conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T)$, então

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base de $\mathcal{I}(T)$, tendo-se $\dim \mathcal{I}(T) = 2$.

Como $\dim U = 3$, tem-se $\mathcal{I}(T) \neq U$, pelo que T não é sobrejectiva.

(iv) Resolva, em U, a equação linear $T(A) = B$.

Como

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right)$$

então $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ é uma solução particular da equação linear $T(A) = B$.

Como a solução geral de $T(A) = B$ é dada por:

$$(\text{Solução particular de } T(A) = B) + (\text{Solução geral de } T(A) = \mathbf{0})$$

e como a solução geral de $T(A) = \mathbf{0}$ é dada por

$$\mathcal{N}(T) = L\left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} \right),$$

então a solução geral de $T(A) = B$ é dada por:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + L\left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} \right) = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + a & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}.$$

26. Considere a transformação linear $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3$ cuja matriz $M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2)$ que a representa em relação às bases ordenadas

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $\mathcal{B}_2 = \{1 + t, t + t^2, t^2 + t^3, t^3\}$ de $\mathcal{P}_3$ é dada por

$$M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (*)$$

(i) Seja $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, com $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. De (*), tem-se

$$\begin{aligned}
T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) &= 1+t \\
T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) &= 1+t+t+t^2 = 1+2t+t^2 \\
T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) &= 1+t+t+t^2+t^2+t^3 = 1+2t+2t^2+t^3 \\
T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) &= 1+t+t+t^2+t^2+t^3+t^3 = 1+2t+2t^2+2t^3
\end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= -\frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

então

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) \underset{T \text{ é linear}}{=} aT\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + bT\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + cT\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) + dT\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$\begin{aligned}
= \; & a\left(\frac{1}{3}(1+t) + \frac{1}{3}\left(1+2t+t^2\right) - \frac{2}{3}\left(1+2t+2t^2+t^3\right) + \frac{1}{3}\left(1+2t+2t^2+2t^3\right)\right) + \\
& +b\left(\frac{1}{3}(1+t) + \frac{1}{3}\left(1+2t+t^2\right) + \frac{1}{3}\left(1+2t+2t^2+t^3\right) - \frac{2}{3}\left(1+2t+2t^2+2t^3\right)\right) + \\
& +c\left(\frac{1}{3}(1+t) - \frac{2}{3}\left(1+2t+t^2\right) + \frac{1}{3}\left(1+2t+2t^2+t^3\right) + \frac{1}{3}\left(1+2t+2t^2+2t^3\right)\right) + \\
& +d\left(-\frac{2}{3}(1+t) + \frac{1}{3}\left(1+2t+t^2\right) + \frac{1}{3}\left(1+2t+2t^2+t^3\right) + \frac{1}{3}\left(1+2t+2t^2+2t^3\right)\right)
\end{aligned}$$

$$= a\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}t-\frac{1}{3}t^2\right) + b\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}t-\frac{1}{3}t^2-t^3\right) + c\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}t+\frac{2}{3}t^2+t^3\right) + d\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{3}t+\frac{5}{3}t^2+t^3\right) =$$

$$= \frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}d + \left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c+\frac{4}{3}d\right)t + \left(-\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}b+\frac{2}{3}c+\frac{5}{3}d\right)t^2 + (-b+c+d)\,t^3$$

Logo, a expressão geral de $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3$ é dada por:

$$T\left(\left[\begin{array}{cc} a & b \\ b & c \end{array}\right]\right)=\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}d+\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c+\frac{4}{3}d\right)t+\left(-\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}b+\frac{2}{3}c+\frac{5}{3}d\right)t^2+(-b+c+d)\,t^3.$$

(ii) Como a transformação linear $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3$ é invertível, pois $M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)$ é invertível então T é linear e bijectiva, isto é, T é um isomorfismo. Sendo T um isomorfismo, T^{-1} também é um isomorfismo.

Determinemos a expressão geral do isomorfismo T^{-1}, isto é, determinemos

$$T^{-1}\left(a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3\right).$$

Primeiro determinemos $M(T;\mathcal{B}^c_{2\times 2};\mathcal{B}^c_3)$, onde

$$\mathcal{B}^c_{2\times 2}=\left\{\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right],\left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right],\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}\right],\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]\right\}$$

e

$$\mathcal{B}^c_3=\left\{1,t,t^2,t^3\right\}$$

são respectivamente as bases canónicas de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e de $\mathcal{P}_3$.

A matriz de mudança da base $\mathcal{B}_1$ para a base $\mathcal{B}^c_{2\times 2}$ é dada por:

$$S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}^c_{2\times 2}}=\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

A matriz de mudança da base $\mathcal{B}_2$ para a base $\mathcal{B}^c_3$ é dada por:

$$S_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}^c_3}=\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Logo, a matriz que representa T em relação às bases $\mathcal{B}^c_{2\times 2}$ e $\mathcal{B}^c_3$ é dada por:

$$M(T;\mathcal{B}^c_{2\times 2};\mathcal{B}^c_3)=S_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}^c_3}M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)\left(S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}^c_{2\times 2}}\right)^{-1}=$$

$$=\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]^{-1}=$$

$$=\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cccc} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cccc} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Note que a expressão geral de T obtida na alínea (i) pode ser obtida através da matriz $M(T;\mathcal{B}^c_{2\times 2};\mathcal{B}^c_3)$ anterior:

as coordenadas de $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\right)$ na base $\mathcal{B}^c_3$ são dadas por

$$M(T;\mathcal{B}^c_{2\times 2};\mathcal{B}^c_3)\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}d \\ \frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c+\frac{4}{3}d \\ \frac{2}{3}c-\frac{1}{3}b-\frac{1}{3}a+\frac{5}{3}d \\ c-b+d \end{bmatrix}.$$

Logo

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}d+\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c+\frac{4}{3}d\right)t+\left(-\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}b+\frac{2}{3}c+\frac{5}{3}d\right)t^2+(-b+c+d)\,t^3$$

Seja $p(t)\in\mathcal{P}_3$, isto é, $p(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3$, com $a_0,a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}$.

Atendendo a que as coordenadas de $T^{-1}\left(a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3\right)$ em relação à base $\mathcal{B}^c_{2\times 2}$ são dadas por:

$$\left(M(T;\mathcal{B}^c_{2\times 2};\mathcal{B}^c_3)\right)^{-1}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a_1-a_0-2a_2+a_3 \\ 2a_0-a_1+a_2-a_3 \\ 3a_0-2a_1+a_2 \\ a_1-a_0 \end{bmatrix},$$

tem-se

$$T^{-1}\left(a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3\right) = (2a_1-a_0-2a_2+a_3)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+$$

$$+(2a_0-a_1+a_2-a_3)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+(3a_0-2a_1+a_2)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+(a_1-a_0)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 2a_1-a_0-2a_2+a_3 & 2a_0-a_1+a_2-a_3 \\ 3a_0-2a_1+a_2 & a_1-a_0 \end{bmatrix}.$$

Ou seja, a expressão geral do isomorfismo $T^{-1}:\mathcal{P}_3\to\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ é dada por:

$$T^{-1}\left(a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3\right) = \begin{bmatrix} 2a_1-a_0-2a_2+a_3 & 2a_0-a_1+a_2-a_3 \\ 3a_0-2a_1+a_2 & a_1-a_0 \end{bmatrix}.$$

Tem-se de facto:

$$T^{-1}\circ T = I_{\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})} \qquad \text{e} \qquad T\circ T^{-1} = I_{\mathcal{P}_3}.$$

(iii) Atendendo à alínea anterior, a solução geral da equação linear

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 1 + 2t + 3t^2 + 4t^3$$

é dada por:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = T^{-1}\left(1 + 2t + 3t^2 + 4t^3\right) = \begin{bmatrix} 4-1-6+4 & 2-2+3-4 \\ 3-4+3 & 2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

27. Seja U o espaço linear das funções reais de variável real duas vezes diferenciável. Considere a transformação linear $T : U \to U$ definida por

$$T(f) = f'' - 2f' + f.$$

Considere o subespaço $S = \{f \in U : f'' - 2f' + f = \mathbf{0}\}$ de U.

(i) Mostre que o conjunto $\{e^t, te^t\}$ é uma base de S. Sugestão: Mostre que se $f \in S$, então $f(t)\, e^{-t}$ é um polinómio de grau menor ou igual a 1.

Seja $f \in S$. Como

$$\begin{aligned}\left(f(t)\, e^{-t}\right)'' &= \left(f'(t)\, e^{-t} - f(t)\, e^{-t}\right)' = f''(t)\, e^{-t} - f'(t)\, e^{-t} - f'(t)\, e^{-t} + f(t)\, e^{-t} = \\ &= \left(f''(t) - 2f'(t) + f(t)\right) e^{-t} \underset{f\in S}{=} \mathbf{0}\end{aligned}$$

então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que para todo o $t \in \mathbb{R}$

$$\left(f(t)\, e^{-t}\right)' = c.$$

Assim, existe $d \in \mathbb{R}$ tal que para todo o $t \in \mathbb{R}$

$$f(t)\, e^{-t} = ct + d \in \mathcal{P}_1 = L(\{1, t\}).$$

Logo

$$f(t) \in L\left(\left\{e^t, te^t\right\}\right).$$

Tem-se assim:

$$S = L\left(\left\{e^t, te^t\right\}\right),$$

onde o conjunto $\{e^t, te^t\}$ é linearmente independente uma vez que o conjunto $\{1, t\}$ é linearmente independente.

Logo o conjunto $\{e^t, te^t\}$ é uma base de S.

(ii) Mostre que dados $a, b \in \mathbb{R}$, existe uma única função $f \in S$ tal que $f(0) = a$ e $f'(0) = b$.

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Sejam $f, g \in S$ tais que

$$f(0) = g(0) = a \quad \text{e} \quad f'(0) = g'(0) = b.$$

Como $S = L(\{e^t, te^t\})$, existem $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(t) = \alpha_1 e^t + \beta_1 te^t \quad \text{e} \quad g(t) = \alpha_2 e^t + \beta_2 te^t.$$

Como $f(0) = g(0) = a$ tem-se

$$a = f(0) = \alpha_1 \quad \text{e} \quad a = g(0) = \alpha_2.$$

Logo

$$\alpha_1 = \alpha_2.$$

Por outro lado, como $f'(0) = g'(0) = b$,

$$b = f'(0) = \left(\alpha_1 e^t + \beta_1 t e^t\right)'_{t=0} = \left(\alpha_1 e^t + \beta_1 e^t + \beta_1 t e^t\right)_{t=0} = \alpha_1 + \beta_1$$

e

$$b = g'(0) = \left(\alpha_2 e^t + \beta_2 t e^t\right)'_{t=0} = \left(\alpha_2 e^t + \beta_2 e^t + \beta_2 t e^t\right)_{t=0} = \alpha_2 + \beta_2$$

Assim,

$$\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2$$

e uma vez que $\alpha_1 = \alpha_2$, então

$$\beta_1 = \beta_2.$$

Deste modo, para todo o $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = \alpha_1 e^t + \beta_1 t e^t = \alpha_2 e^t + \beta_2 t e^t = g(t),$$

isto é,

$$f = g.$$

Pelo que dados $a, b \in \mathbb{R}$, existe uma única função $f \in S$ tal que $f(0) = a$ e $f'(0) = b$.

(iii) Determine a única solução f da equação diferencial linear $T(f) = 1$ que verifica $f(0) = 1$ e $f'(0) = 0$.

A função identicamente igual a $1 : f = 1$ ($f(t) = 1$,para todo o $t \in \mathbb{R}$) é uma solução particular de

$$\{f \in U : T(f) = 1 \quad \text{e} \quad f(0) = 1 \quad \text{e} \quad f'(0) = 0\}.$$

Atendendo à alínea anterior, existe uma única função $f \in S$ tal que $f(0) = 0$ e $f'(0) = 0$. Como

$$f(t) = \alpha e^t + \beta t e^t$$

e

$$0 = f(0) = \alpha \quad \text{e} \quad 0 = f'(0) = \beta$$

então

$$f(t) = 0,$$

para todo o $t \in \mathbb{R}$, é a solução geral de

$$\{f \in U : T(f) = \mathbf{0} \quad \text{e } f(0) = 0 \quad \text{e} \quad f'(0) = 0\}$$

Como a solução geral de

$$\{f \in U : T(f) = 1 \quad \text{e} \quad f(0) = 1 \quad \text{e} \quad f'(0) = 0\}.$$

é dada por:

$$\begin{aligned}&(\text{Solução particular de } \{f \in U : T(f) = 1 \quad \text{e} \quad f(0) = 1 \quad \text{e} \quad f'(0) = 0\}) + \\ &+ (\text{Solução geral de } \{f \in U : T(f) = \mathbf{0} \quad \text{e } f(0) = 0 \quad \text{e} \quad f'(0) = 0\}),\end{aligned}$$

então a solução geral de

$$\{f \in U : T(f) = 1 \quad \text{e} \quad f(0) = 1 \quad \text{e} \quad f'(0) = 0\}$$

é dada por:

$$f(t) = 1,$$

para todo o $t \in \mathbb{R}$.

28) (i)

$$M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(ii) Como $\det M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B}) \neq 0$ então T é invertível e

$$T(u) = (2, -3, 3, -2) \Leftrightarrow u = T^{-1}(2, -3, 3, -2).$$

Como

$$M(T^{-1}; \mathcal{B}; \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

então atendendo a que as coordenadas de $(2, -3, 3, -2)$ em $\mathcal{B}$ são 2 e -3 pois $(2, -3, 3, -2) = 2v_1 - 3v_2$, tem-se que

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

são as coordenadas de u na base $\mathcal{B}$. Logo

$$T(u) = (2, -3, 3, -2) \Leftrightarrow u = -3v_1 - 2v_2 = (-3, -2, 2, 3),$$

ou seja $u = (-3, -2, 2, 3)$ é a única solução da equação linear $T(u) = (2, -3, 3, -2)$.

(iii) Como

$$R(1, 0, 0, 0) = R(v_1) + R(w_2) = v_2 = (0, 1, -1, 0),$$

$$R(0, 1, 0, 0) = R(v_2) + R(w_1) - R(w_2) = v_1 = (1, 0, 0, -1),$$

$$R(0, 0, 1, 0) = R(w_1) - R(w_2) = (0, 0, 0, 0)$$

e

$$R(0, 0, 0, 1) = R(w_2) = (0, 0, 0, 0)$$

então, sendo $\mathcal{B}_c$ a base canónica de $\mathbb{R}^4$,

$$M(R;\mathcal{B}_c,\mathcal{B}_c)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{bmatrix}$$

pelo que

$$R(u)=(2,-3,3,-2)\Leftrightarrow M(R;\mathcal{B}_c,\mathcal{B}_c)u=\begin{bmatrix}2\\-3\\3\\-2\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u\in\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4:-b=2,\ a=-3,\ c,d\in\mathbb{R}\}=\{(-3,-2,c,d):c,d\in\mathbb{R}\}.$$

Isto é, a solução geral de R

$$(u)=(2,-3,3,-2)$$

é:

$$\{(-3,-2,c,d):\ c,d\in\mathbb{R}\}.$$

29) a)

$$T_2(1)=1-t=0\,(1+t)+1\,(1-t)+0t^2,$$

$$T_2(t)=2+8t-2t^2=5\,(1+t)-3\,(1-t)-2t^2,$$

logo

$$M(T_2;\mathcal{B};\mathcal{B}_1)=\begin{bmatrix}0&5\\1&-3\\0&-2\end{bmatrix}.$$

b)

$$\mathcal{N}\left(M(T_1;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)\right)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}1&2&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\right)=\{(-2y,y,y):y\in\mathbb{R}\}=L\left(\{(-2,1,1)\}\right).$$

Logo

$$\mathcal{N}(T_1)=L\left(\left\{(-2)\,(1+t)+1\,(1-t)+1t^2\right\}\right)=L\left(\left\{-1-3t+t^2\right\}\right).$$

Base para

$$\mathcal{N}(T_1):\left\{-1-3t+t^2\right\}.$$

T_1 é sobrejectiva:

$$\dim\mathcal{I}(T_1)=\dim\mathcal{P}_2-\dim\mathcal{N}(T_1)=2=\dim\mathcal{P}_1.$$

c)

$$T_1(t)=\frac{1}{2}\left[T_1\,(1+t)-T_1\,(1-t)\right]=$$

$$= \frac{1}{2}\left[1\left(1+t\right)+0\left(1+2t\right)-2\left(1+t\right)+1\left(1+2t\right)\right]=\frac{1}{2}t \Leftrightarrow T_1(2t)=t$$

(uma vez que T_1 é linear), logo a solução geral da equação $T_1(p\left(t\right))=t$ é:

$$\{2t\}+\mathcal{N}(T_1)=\left\{2t+c\left(-1-3t+t^2\right):c\in\mathbb{R}\right\}.$$

d) $\{1,t\}$ é uma base de $\mathcal{P}_1$. Como

$$\left(T_1\circ T_2\right)(1)=T_1\left(T_2(1)\right)=T_1\left(1-t\right)=2\left(1+t\right)-1\left(1+2t\right)=1$$

e

$$\begin{aligned}\left(T_1\circ T_2\right)(t)=T_1\left(T_2(t)\right)=T_1\left(2+8t-2t^2\right)=\\ =5T_1\left(1+t\right)-3T_1\left(1-t\right)-2T_1t^2=\\ =5\left[1\left(1+t\right)+0\left(1+2t\right)\right]-3\left[2\left(1+t\right)-\left(1+2t\right)\right]-2\left[0\left(1+t\right)+1\left(1+2t\right)\right]=t,\end{aligned}$$

então $T_1\circ T_2=I$.

30) a) $\mathcal{N}\left(T\right)=\mathcal{N}\left(M(T;B_c;B')\right)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}-1&0&2\\4&2&2\\1&1&3\end{bmatrix}\right)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}-1&0&2\\0&1&5\\0&0&0\end{bmatrix}\right)=$

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:-x+2z=0\ \text{ e }\ y+5z=0\right\}=\left\{(2z,-5z,z)\in\mathbb{R}^3:z\in\mathbb{R}\right\}=L\left(\{(2,-5,1)\}\right).$$

Como o conjunto $\{(2,-5,1)\}$ gera $\mathcal{N}\left(T\right)$ e é linearmente independente então é uma base de $\mathcal{N}\left(T\right)$.
Logo $\dim\mathcal{N}\left(T\right)=1$.

b) Como $B_c=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ gera $\mathbb{R}^3$, tem-se

$$\mathcal{I}\left(T\right)=L\left(\{T(1,0,0),T(0,1,0),T\left(0,0,1\right)\}\right).$$

Atendendo a que

$$\begin{aligned}T(1,0,0)&=-(1,1,0))+4(1,-1,1)+(0,1,1)=(3,-4,5),\\ T(0,1,0)&=0(1,1,0))+2(1,-1,1)+(0,1,1)=(2,-1,3),\\ T(0,0,1)&=2(1,1,0))+2(1,-1,1)+3\left(0,1,1\right)=(4,3,5)\end{aligned}$$

e $\dim\mathcal{I}\left(T\right)=\operatorname{car}M(T;B_c;B')=2$, tem-se

$$\mathcal{I}\left(T\right)=L\left(\{\left(3,-4,5\right),\left(2,-1,3\right),\left(4,3,5\right)\}\right)=L\left(\{\left(2,-1,3\right),\left(4,3,5\right)\}\right)$$

uma vez que $\{\left(2,-1,3\right),\left(4,3,5\right)\}$ é linearmente independente, é assim uma base de $\mathcal{I}\left(T\right)$.

c) Atendendo à alínea anterior, tem-se

$$T\left(x,y,z\right)=M(T;B_c;B_c)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2&4\\-4&-1&3\\5&3&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\left(3x+2y+4z,-4x-y+3z,5x+3y+5z\right),$$

para todo $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

31) a) Como $B=\{1,t,t^2\}$ gera $\mathcal{P}_2$, tem-se

$$\mathcal{I}(T)=L\left(\left\{T(1),T(t),T\left(t^2\right)\right\}\right)=L\left(\{1,4t\}\right).$$

Como $\{1,4t\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T)$, é assim uma base de $\mathcal{I}(T)$, tendo-se $\dim\mathcal{I}(T)=2$.

Como

$$\dim\mathcal{N}(T)=\dim\mathcal{N}\left(M(T_1;B;B)\right)=\operatorname{nul}\left(M(T_1;B;B)\right)=3-\operatorname{car}\left(M(T_1;B;B)\right)=3-2=1\neq 0$$

então T não é injectiva.

b) $T_2(p(t))=\dfrac{1}{4}+t\Leftrightarrow(tp'(t))'=\dfrac{1}{4}+t\Leftrightarrow\left(t\left(a_0+a_1t+a_2t^2\right)'\right)'=\dfrac{1}{4}+t\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a_1+4a_2t=\frac{1}{4}+t\Leftrightarrow\left(a_1=\frac{1}{4},\quad a_2=\frac{1}{4}\quad\text{e}\quad a_0\in\mathbb{R}\right)\Leftrightarrow p(t)\in\left\{\frac{1}{4}t+\frac{1}{4}t^2\right\}+L\left(\{1\}\right).$$

32) a) Como

$$T\left(\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\right)=T\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}T\left(\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\right)+\frac{1}{2}T\left(\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{2}\left(t+t^2\right)+\frac{1}{2}(1+t)=\frac{1}{2}+t+\frac{1}{2}t^2=$$

$$=\frac{1}{2}+t+\frac{1}{2}t^2=\frac{1}{2}\left(1+2t+t^2\right)+0\left(1-t^2\right)$$

e

$$T\left(\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\right)=T\left(-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}T\left(\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\right)+\frac{1}{2}T\left(\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\right)=-\frac{1}{2}\left(t+t^2\right)+\frac{1}{2}(1+t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t^2=$$

$$=0\left(1+2t+t^2\right)+\frac{1}{2}\left(1-t^2\right)$$

a matriz que representa a aplicação linear T em relação às bases

$$B_1=\left\{\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\right\}\qquad\text{e}\qquad B_2=\left\{1+2t+t^2,1-t^2\right\}$$

de U e V respectivamente, é dada por

$$M\left(T;B_1;B_2\right)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

b) Seja $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in U$. Existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo $a = \alpha + \beta = d$, $\beta = c$ e $\alpha = b$, tendo-se

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a = b + c = d \right\}.$$

e, para $b, c \in \mathbb{R}$,

$$T \begin{bmatrix} b+c & b \\ c & b+c \end{bmatrix} = bT\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) + cT\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) =$$
$$= b\left(\frac{1}{2} + t + \frac{1}{2}t^2 \right) + c\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t^2 \right) = \frac{b+c}{2} + bt + \frac{b-c}{2}t^2$$

33. a) Sendo $B = \{1, t, t^2\}$, como $T(1) = 2$, $T(t) = -t$ e $T(t^2) = -2t^2$ então

$$M(T; B; B) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

b) Como $\{1, t, t^2\}$ gera $\mathcal{P}_2$, tem-se

$$\mathcal{I}(T) = L\left(\left\{ T(1), T(t), T\left(t^2\right) \right\} \right) = L\left(\left\{ 2, -t, -2t^2 \right\} \right) = L\left(\left\{ 1, t, t^2 \right\} \right) = \mathcal{P}_2$$

e $\dim \mathcal{I}(T) = 3$, uma vez que $\{1, t, t^2\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$ (contradomínio de T). Como

$$3 = \dim \mathcal{P}_2 = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T) = \dim \mathcal{N}(T) + 3 \Leftrightarrow \dim \mathcal{N}(T) = 0$$

então T é injectiva.

34. a)

$$\mathcal{N}(M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2)) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) =$$
$$= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0 \right\} = \left\{ (2y - z, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Logo

$$\mathcal{N}(T) = \{(2y - z)(1, 0, 1) + y(0, 1, 1) + z(1, 1, 0) : y, z \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \{(2y, y + z, 3y - z) : y, z \in \mathbb{R}\} = L(\{(2, 1, 3), (0, 1, -1)\}).$$

Como o conjunto $\{(2, 1, 3), (0, 1, -1)\}$ gera $\mathcal{N}(T)$ e é linearmente independente então é uma base de $\mathcal{N}(T)$.

Logo $\dim \mathcal{N}(T) = 2$. Como

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T) \Leftrightarrow 3 = 2 + \dim \mathcal{I}(T) \Leftrightarrow \dim \mathcal{I}(T) = 1$$

então $\mathcal{I}(T) \neq \mathbb{R}^3$ e como tal T não é sobrejectiva.

b) Como

$$T(1,0,1) = 1(1,-1) + (-2)(1,1) = (-1,-3) \Leftrightarrow T\left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right),$$

a solução geral de $T(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ é dada por:

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right\} = \left\{\left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)\right\} + \mathcal{N}(T) =$$

$$= \left\{\left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right) + s(2,1,3) + t(0,1,-1) : s,t \in \mathbb{R}\right\}.$$

35. a) $M(T;\mathcal{B};\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ uma vez que

$$T(p_1(t)) = p_2(t), \quad T(p_2(t)) = p_3(t), \quad T(p_3(t)) = 0$$

e $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ é uma base ordenada de $\mathcal{P}_2$.

b) Atendendo a que

$$M\left(T^3;\mathcal{B};\mathcal{B}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

sendo α, β e γ as coordenadas de $p(t)$ em $\mathcal{B}$ então as coordenadas de $T^3(p(t))$ em $\mathcal{B}$ são dadas por:

$$M\left(T^3;\mathcal{B};\mathcal{B}\right)\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pelo que $T^3(p(t)) = \mathbf{0}$, para todo o $p(t) \in \mathcal{P}_2$.

c) Como $\mathcal{N}(M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})) = L(\{(0,0,1)\})$, então

$$\mathcal{N}(T) = L(\{0p_1(t) + 0p_2(t) + 1p_3(t)\}) = L(\{p_3(t)\}) = L(\{1\}).$$

O conjunto $\{1\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$ pois gera $\mathcal{N}(T)$ e é linearmente independente.

Quanto ao contradomínio, como $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ gera $\mathcal{P}_2$:

$$\mathcal{I}(T) = L\left(\{T\left(p_1(t)\right), T\left(p_2(t)\right), T\left(p_3(t)\right)\}\right) = L\left(\{p_2(t), p_3(t)\}\right) = L\left(\{2+3t, 1\}\right).$$

O conjunto $\{2+3t, 1\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$ pois gera $\mathcal{I}(T)$ e é linearmente independente.

d) Como

$$T(p(t)) = 3 + 3t = (2+3t) + 1 = T\left(p_1(t)\right) + T\left(p_2(t)\right) =$$
$$\underset{T \text{ é linear}}{=} T\left(p_1(t) + p_2(t)\right) = T\left(3 + 5t + 3t^2\right),$$

logo $3 + 5t + 3t^2$ é uma solução particular de

$$T(p(t)) = 3 + 3t,$$

pelo que a solução geral de $T(p(t)) = 3 + 3t$ é dada por:

$$\mathcal{N}(T) + 3 + 5t + 3t^2 = \alpha + 3 + 5t + 3t^2 \quad \text{com} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$