Instituto Superior Técnico - Álgebra Linear - 1^o Semestre 2011/2012

LEAN - LEMat - MEAmbi - MEBiol - MEQ

Resolução da 5^a Ficha de exercícios

1. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como

$$\det(A - 0I) = \det \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} = \det \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{*} = 0$$

então 0 é valor próprio de A e atendendo a (*) $(1, -2, 1) \in \mathcal{N}(A) = L\{(1, -2, 1)\}$, logo tem-se

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

isto é, $(1, -2, 1)$ é um vector próprio de A associado ao valor próprio 0.

2. Tem-se

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, 0 é um valor próprio de $\begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$ e $(0, -1, 1)$ e $(1, -1, 0)$ são dois vectores próprios (associados ao valor próprio 0) linearmente independentes.

3. Determinemos os valores próprios de uma matriz A 2×2 cujo traço seja igual a 5 e cujo determinante seja igual a 6.

Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Tem-se

$$\operatorname{tr} A = 5 \Leftrightarrow a + d = 5 \qquad \text{e} \qquad \det A = 6 \Leftrightarrow ad - bc = 6.$$

Sejam λ_1 e λ_2 dois valores próprios de A. Como

$$\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 \qquad \text{e} \qquad \det A = \lambda_1 \lambda_2$$

então

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 5 \qquad \text{e} \qquad \lambda_1 \lambda_2 = 6$$

Logo

$$[\lambda_1 = 5 - \lambda_2 \qquad \text{e} \qquad (5 - \lambda_2)\,\lambda_2 = 6] \Leftrightarrow (\lambda = 3 \ \text{ ou } \ \lambda = 2),$$

isto é, os valores próprios de A são 3 e 2.

4. Determinemos uma matriz A real simétrica ($A^T = A$) 2×2 cujos valores próprios sejam -2 e 2 e tal que $(2,1)$ seja um vector próprio associado ao valor próprio 2.

Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $A = A^T$. Logo $b = c$. Além disso, sendo -2 e 2 dois valores próprios de A tem-se

$$0 = \det(A + 2I) = \det \begin{bmatrix} a+2 & b \\ b & d+2 \end{bmatrix} = -b^2 + 2a + 2d + ad + 4$$

e

$$0 = \det(A - 2I) = \det \begin{bmatrix} a-2 & b \\ b & d-2 \end{bmatrix} = -b^2 - 2a - 2d + ad + 4$$

sendo $(2,1)$ um vector próprio associado ao valor próprio 2 tem-se

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow (2a + b = 4 \ \text{ e } \ 2b + d = 2).$$

Logo

$$\begin{cases} -b^2 + 2a + 2d + ad + 4 = 0 \\ -b^2 - 2a - 2d + ad + 4 = 0 \\ 2a + b = 4 \\ 2b + d = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{6}{5} \\ \\ b = \frac{8}{5} \\ \\ d = -\frac{6}{5} \end{cases}$$

e assim

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{8}{5} \\ \\ \frac{8}{5} & -\frac{6}{5} \end{bmatrix}.$$

5. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que admite os vectores próprios

$$v_1 = (1,2,1), \qquad v_2 = (-1,0,1), \qquad v_3 = (0,1,0),$$

associados respectivamente aos valores próprios $1, 2$ e 3.

Determinemos a expressão geral de T.

Seja $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Existem $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$(x,y,z) = \alpha(1,2,1) + \beta(-1,0,1) + \gamma(0,1,0).$$

Logo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x \\ 2 & 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & 0 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x \\ 0 & 2 & 1 & y-2x \\ 0 & 2 & 0 & z-x \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x \\ 0 & 2 & 1 & y-2x \\ 0 & 0 & -1 & z-y+x \end{array}\right]$$

e assim $\gamma = -x+y-z$, $\beta = \frac{1}{2}(-x+z)$, $\alpha = \frac{1}{2}(x+z)$. Pelo que

$$T(x,y,z) = \frac{1}{2}(x+z)\,T(1,2,1) + \frac{1}{2}(-x+z)\,T(-1,0,1) + (-x+y-z)\,T(0,1,0) =$$

$$= \frac{1}{2}(x+z)(1,2,1) + \frac{1}{2}(-x+z)\,2(-1,0,1) + (-x+y-z)\,3(0,1,0) =$$

$$= \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}z, 3y-2x-2z, \frac{3}{2}z - \frac{1}{2}x\right)$$

ou seja, a expressão geral de T é dada por:

$$T(x,y,z) = \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}z, 3y-2x-2z, \frac{3}{2}z - \frac{1}{2}x\right).$$

6. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y,z) = (0, y+3z, 3y+z).$$

(i) $T(v_1) = (0,4,4)$. Como não existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T(v_1) = \lambda v_1$, então v_1 não é vector próprio de T.

$T(v_2) = (0,2,-2) = (-2)(0,-1,1) = (-2)v_2$. Logo, v_2 é um vector próprio de T associado ao valor próprio -2.

$T(v_3) = (0,0,0) = 0(1,0,0) = 0v_3$. Logo, v_3 é um vector próprio de T associado ao valor próprio 0.

$T(v_4) = (0,10,6)$. Como não existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T(v_4) = \lambda v_4$, então v_4 não é vector próprio de T.

$T(v_5) = (0,12,12) = 4(0,3,3) = 4v_5$. Logo, v_5 é um vector próprio de T associado ao valor próprio 4.

(ii) Determinemos os valores próprios de T. Seja $A = M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)$. Tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1,0,0)=(0,0,0)$, $T(0,1,0)=(0,1,3)$ e $T(0,0,1)=(0,3,1)$ constituem respectivamente a 1^a, 2^a e 3^a colunas de A.

O polinómio característico é dado por

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left[(1-\lambda)^2-9\right] = \\ &= -\lambda\left((1-\lambda)-3\right)\left((1-\lambda)+3\right) = -\lambda\left(-2-\lambda\right)\left(4-\lambda\right).\end{aligned}$$

Os valores próprios de T são os valores próprios de A, isto é, são os valores de λ para os quais $\det(A-\lambda I)=0$. Logo, os valores próprios de T são

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -2 \quad \text{e} \quad \lambda_3 = 4.$$

(iii) Como 0 é valor próprio de T então T não é invertível. Como T tem 3 valores próprios distintos, os vectores próprios correspondentes a cada um deles irão ser linearmente independentes e como tal irá existir uma base de $\mathbb{R}^3$ formada só com vectores próprios de T, ou seja, T é diagonalizável.

(iv) O subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$\begin{aligned}E_{\lambda_1} &= \mathcal{N}\left(T-\lambda_1 I\right) \underset{\text{base canónica}}{=} \mathcal{N}\left(A-\lambda_1 I\right) = \mathcal{N}\left(A\right) \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \{(x,y,z) : y = z = 0\} = \\ &= \{(x,0,0) : x \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(1,0,0)\}\right).\end{aligned}$$

O conjunto $\{(1,0,0)\}$ é uma base de E_{λ_1}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_1 = 0$ são

$$u = (s,0,0), \ \text{ com } \ s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

O subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$\begin{aligned}E_{\lambda_2} &= \mathcal{N}\left(T-\lambda_2 I\right) \underset{\text{base canónica}}{=} \mathcal{N}\left(A-\lambda_2 I\right) = \mathcal{N}\left(A+2I\right) \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \{(x,y,z) : x = 0 \ \text{ e } \ y+z=0\} = \\ &= \{(x,y,z) : x = 0 \ \text{ e } \ y+z=0\} = \\ &= \{(0,-z,z) : z \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(0,-1,1)\}\right).\end{aligned}$$

O conjunto $\{(0,-1,1)\}$ é uma base de E_{λ_2}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_2 = -2$ são

$$u = (0, -s, s), \text{ com } s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

O subespaço próprio E_{λ_3} é dado por

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_3} &= \mathcal{N}(T - \lambda_3 I) \underset{\text{base canónica}}{=} \mathcal{N}(A - \lambda_3 I) = \mathcal{N}(A - 4I) \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \\
&= \{(x, y, z) : x = 0 \text{ e } -y + z = 0\} = \\
&= \{(x, y, z) : x = 0 \text{ e } y = z\} = \\
&= \{(0, z, z) : z \in \mathbb{R}\} = L(\{(0, 1, 1)\}).
\end{aligned}$$

O conjunto $\{(0, 1, 1)\}$ é uma base de E_{λ_3}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_3 = 4$ são

$$u = (0, s, s), \text{ com } s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

7. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(1, 2) = (5, 5) = T(2, 1).$$

(i) Como

$$(1, -1) = -(1, 2) + (2, 1)$$

Tem-se

$$T(v_1) = T(1, -1) = T[-(1, 2) + (2, 1)] \underset{T \text{ é linear}}{=} -T(1, 2) + T(2, 1) =$$

$$= -(5, 5) + (5, 5) = (0, 0) = 0(1, -1) = 0v_1.$$

Como

$$(1, 1) = \frac{1}{3}(1, 2) + \frac{1}{3}(2, 1)$$

Tem-se

$$T(v_2) = T(1, 1) = T\left[\frac{1}{3}(1, 2) + \frac{1}{3}(2, 1)\right] \underset{T \text{ é linear}}{=} \frac{1}{3}T(1, 2) + \frac{1}{3}T(2, 1) =$$

$$= \frac{1}{3}[(5, 5) + (5, 5)] = \frac{10}{3}(1, 1) = \frac{10}{3}v_2.$$

Logo, v_2 é um vector próprio de T associado ao valor próprio $\frac{10}{3}$.

(ii) Como 0 é valor próprio de T então T não é invertível. Como os vectores $v_1 = (1, -1)$ e $v_2 = (1, 1)$ formam uma base de $\mathbb{R}^2$ pois são dois vectores linearmente independentes em $\mathbb{R}^2$ e $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ e além disso, v_1 e v_2 são vectores próprios de T, então existe uma base de $\mathbb{R}^2$ formada só com vectores próprios de T, ou seja, T é diagonalizável.

(iii) Seja $\mathcal{B}_{vp} = \{v_1, v_2\} = \{(1,-1),(1,1)\}$. Tem-se

$$M(T;\mathcal{B}_{vp};\mathcal{B}_{vp}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{10}{3} \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(v_1) = 0v_1 = 0v_1 + 0v_2$ e $T(v_2) = \frac{10}{3}v_2 = 0v_1 + \frac{10}{3}v_2$ e deste modo as coordenadas $(0,0)$ e $(0, \frac{10}{3})$ constituem respectivamente a 1^a e 2^a colunas de $M(T;\mathcal{B}_{vp};\mathcal{B}_{vp})$.

Logo, $\mathcal{B}_{vp}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ em relação à qual T pode ser representada por uma matriz diagonal, por ser uma base formada só com vectores próprios de T.

(iv) Seja $A = M(T;\mathcal{B}_{vp};\mathcal{B}_{vp})$, com $\mathcal{B}_{vp} = \{(1,-1),(1,1)\}$. O polinómio característico é dado por

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & \frac{10}{3} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda \left(\frac{10}{3} - \lambda \right).$$

Os valores próprios de T são os valores próprios de A, isto é, são os valores de λ para os quais $\det(A - \lambda I) = 0$. Logo, os valores próprios de T são

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{10}{3}.$$

O subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1} &= \mathcal{N}(T - \lambda_1 I) = \{\alpha(1,-1) + \beta(1,1) : (\alpha,\beta) \in \mathcal{N}(A - \lambda_1 I)\} = \\ &= \{\alpha(1,-1) + \beta(1,-1) : (\alpha,\beta) \in L(\{(1,0)\})\} = \\ &= \{\alpha(1,-1) : \alpha \in \mathbb{R}\} = L(\{(1,-1)\}). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(1,-1)\}$ é uma base de E_{λ_1}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_1 = 0$ são

$$u = (s,-s), \text{ com } s \in \mathbb{R} \backslash \{0\}.$$

O subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$\begin{aligned} E_{\lambda_2} &= \mathcal{N}(T - \lambda_2 I) = \{\alpha(1,-1) + \beta(1,1) : (\alpha,\beta) \in \mathcal{N}(A - \lambda_2 I)\} = \\ &= \{\alpha(1,-1) + \beta(1,1) : (\alpha,\beta) \in L(\{(0,1)\})\} = \\ &= \{\beta(1,1) : \beta \in \mathbb{R}\} = L(\{(1,-1)\}). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(1,1)\}$ é uma base de E_{λ_2}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_2 = \frac{10}{3}$ são

$$u = (s,s), \text{ com } s \in \mathbb{R} \backslash \{0\}.$$

8. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ é representada pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(i) Sejam $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (1,1,1)$, $v_3 = (0,0,1)$. Atendendo à matriz, tem-se

$$T(v_1) = T(1,0,0) = 0(1,0,0) + 0(0,1,0) + 0(0,0,1) =$$

$$= (0,0,0) = 0(1,0,0) = 0v_1;$$

$$T(v_2) = T(1,1,1) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1) =$$

$$(1,1,1) = 1(1,1,1) = 1v_2;$$

$$T(v_3) = T(0,0,1) = 0(1,0,0) + 0(0,1,0) + 0(0,0,1) =$$

$$(0,0,0) = 0(0,0,1) = 0v_3.$$

Logo, v_1 é um vector próprio de T associado ao valor próprio 0; v_2 é um vector próprio de T associado ao valor próprio 1; v_3 é um vector próprio de T associado ao valor próprio 0.

(ii) Como 0 é valor próprio de T então T não é invertível. Como os vectores $v_1 = (1,0,0), v_2 = (1,1,1)$ e $v_3 = (0,0,1)$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$ pois são três vectores linearmente independentes em $\mathbb{R}^3$ e $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ e além disso, v_1, v_2 e v_3 são vectores próprios de T, então existe uma base de $\mathbb{R}^3$ formada só com vectores próprios de T, ou seja, T é diagonalizável.

(iii) Seja $A = M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)$. Tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1,0,0) = (0,0,0)$, $T(0,1,0) = (1,1,1)$ e $T(0,0,1) = (0,0,0)$ constituem respectivamente a 1^a, 2^a e 3^a colunas de A.

Determinemos os valores próprios de T. Os valores próprios de T são os valores próprios de A, isto é, são os valores de λ para os quais $\det(A - \lambda I) = 0$.

O polinómio característico é dado por

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 (1 - \lambda).$$

Logo, os valores próprios de T são

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 1.$$

O subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1} &= \mathcal{N}(T - \lambda_1 I) = \mathcal{N}(A - \lambda_1 I) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -\lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda_1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0\right\} = \\ &= \{(x,0,z) : x, z \in \mathbb{R}\} = L(\{(1,0,0), (0,0,1)\}). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(1,0,0),(0,0,1)\}$ é uma base de E_{λ_1}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_1 = 0$ são

$$u = (s,0,t), \text{ com } s,t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

O subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_2} &= \mathcal{N}(T-\lambda_2 I) = \mathcal{N}(A-\lambda_2 I) = \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -\lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda_2 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda_2 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = \\
&= \{(x,y,z) : -x+y=0 \text{ e } y-z=0\} = \\
&= \{(x,x,x) : x \in \mathbb{R}\} = L(\{(1,1,1)\}).
\end{aligned}$$

O conjunto $\{(1,1,1)\}$ é uma base de E_{λ_2}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_2 = 1$ são

$$u = (s,s,s), \text{ com } s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

(iv) É possível ter então uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída só por vectores próprios de T:

$$\mathcal{B}_{vp} = \{(1,0,0),(1,1,1),(0,0,1)\},$$

uma vez que

$$\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} = 3.$$

Note ainda que

$$M(T;\mathcal{B}_{vp};\mathcal{B}_{vp}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

e

$$M(T;\mathcal{B}_{vp};\mathcal{B}_{vp}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} = S_{\mathcal{B}_c^3 \to \mathcal{B}_{vp}} A \left(S_{\mathcal{B}_c^3 \to \mathcal{B}_{vp}}\right)^{-1}$$

com

$$\left(S_{\mathcal{B}_c^3 \to \mathcal{B}_{vp}}\right)^{-1} = S_{\mathcal{B}_{vp} \to \mathcal{B}_c^3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3).$$

Isto é, a matriz A é diagonalizável e a matriz $M(T;\mathcal{B}_{vp};\mathcal{B}_{vp})$ é diagonal tendo-se

$$\begin{array}{ccc}
(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c^3) & \xrightarrow[T]{A} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c^3) \\
S_{\mathcal{B}_c^3 \to \mathcal{B}_{vp}} \downarrow I & & I \downarrow S_{\mathcal{B}_c^3 \to \mathcal{B}_{vp}} \\
(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_{vp}) & \xrightarrow[M(T;\mathcal{B}_{vp};\mathcal{B}_{vp})]{T} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_{vp})
\end{array}$$

Em resumo, existe $P^{-1} = S_{\mathcal{B}_{vp} \to \mathcal{B}_c^3}$ tal que

$$D = PAP^{-1}$$

com $D = M(T; \mathcal{B}_{vp}; \mathcal{B}_{vp}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$.

9. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que em relação à base ordenada $\mathcal{B}_1 = \{(1,2), (2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ é representada pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

(i) Tem-se

$$\det(A - 0I) = \det A = -5 \neq 0.$$

Logo, como 0 não é valor próprio de T então T é invertível.

Os valores próprios de T são os valores próprios de A, isto é, são os valores de λ para os quais $\det(A - \lambda I) = 0$.

O polinómio característico é dado por

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 9 = [(2-\lambda) - 3]\,[(2-\lambda) + 3] =$$

$$= (-1-\lambda)(5-\lambda)$$

Logo, os valores próprios de T são

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 5.$$

Como T tem 2 valores próprios distintos, os vectores próprios correspondentes a cada um deles irão ser linearmente independentes e como tal irá existir uma base de $\mathbb{R}^2$ formada só com vectores próprios de T, ou seja, T é diagonalizável.

(ii) O subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1} &= \mathcal{N}(T - \lambda_1 I) = \{\alpha(1,2) + \beta(2,1) : (\alpha, \beta) \in \mathcal{N}(A - (-1)I)\} = \\ &= \left\{\alpha(1,2) + \beta(2,1) : (\alpha, \beta) \in \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\right)\right\} = \\ &= \left\{\alpha(1,2) + \beta(2,1) : (\alpha, \beta) \in \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right\} = \\ &= \{\alpha(1,2) + \beta(2,1) : (\alpha, \beta) \in L(\{(-1,1)\})\} = \\ &= \{\alpha(-1,1) : \alpha \in \mathbb{R}\} = L(\{(-1,1)\}). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(-1,1)\}$ é uma base de E_{λ_1}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_1 = -1$ são

$$u = (-s, s), \;\; \text{com} \;\; s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

O subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_1} &= \mathcal{N}(T-\lambda_1 I) = \{\alpha(1,2)+\beta(2,1) : (\alpha,\beta)\in\mathcal{N}(A-5I)\} = \\
&= \left\{\alpha(1,2)+\beta(2,1) : (\alpha,\beta)\in\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\right)\right\} = \\
&= \left\{\alpha(1,2)+\beta(2,1) : (\alpha,\beta)\in\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right\} = \\
&= \{\alpha(1,2)+\beta(2,1) : (\alpha,\beta)\in L(\{(1,1)\})\} = \\
&= \{\alpha(1,1) : \alpha\in\mathbb{R}\} = L(\{(1,1)\}).
\end{aligned}$$

O conjunto $\{(1,1)\}$ é uma base de E_{λ_2}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_2 = 5$ são

$$u = (s,s), \text{ com } s\in\mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

(iii) É possível ter uma base de $\mathbb{R}^2$ constituída só por vectores próprios de T:

$$\mathcal{B}_{vp} = \{(-1,1),(1,1)\},$$

uma vez que

$$\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} = 2 = \dim\mathbb{R}^2.$$

Logo,

$$M(T;\mathcal{B}_{vp};\mathcal{B}_{vp}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

uma vez que

$$T(-1,1) = \lambda_1(-1,1) = \lambda_1(-1,1) + 0(1,1)$$

e

$$T(1,1) = \lambda_2(1,1) = 0(-1,1) + \lambda_2(1,1).$$

Deste modo, $(\lambda_1,0)$ e $(0,\lambda_2)$ constituem respectivamente a 1^a e 2^a colunas de $M(T;\mathcal{B}_{vp};\mathcal{B}_{vp})$.

Além disso, sendo $\mathcal{B}_1 = \{(1,2),(2,1)\}$, tem-se

$$M(T;\mathcal{B}_{vp};\mathcal{B}_{vp}) = S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_{vp}} A \left(S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_{vp}}\right)^{-1}$$

com

$$\left(S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_{vp}}\right)^{-1} = S_{\mathcal{B}_{vp}\to\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_1)$$

uma vez que

$$(-1,1) = (1,2)-(2,1) \quad \text{e} \quad (1,1) = \frac{1}{3}(1,2) + \frac{1}{3}(2,1).$$

Logo, a matriz A é diagonalizável e tem-se

$$D = PAP^{-1}$$

com

$$P^{-1} = S_{\mathcal{B}_{vp}\to\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = M(T;\mathcal{B}_{vp};\mathcal{B}_{vp}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Observação:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_1) & \xrightarrow[T]{A} & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_1) \\ P^{-1} \uparrow I & & I \downarrow P \\ (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{vp}) & \xrightarrow[D]{T} & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{vp}) \end{array}$$

10. Seja V um espaço linear de dimensão finita. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear tal que $T^2 = T$. Uma tranformação linear nas condições anteriores chama-se **projecção**.

(i) Mostre que os valores próprios de T são 0 e 1.

Dem. Seja λ um valor próprio de T. Logo existe $v \neq \mathbf{0}$ tal que

$$T(v) = \lambda v.$$

Por outro lado, como

$$\lambda v = T(v) = T^2(v) = (T \circ T)(v) = T(T(v)) = T(\lambda v) \underset{T \text{ é linear}}{=} \lambda T(v) = \lambda\lambda v = \lambda^2 v$$

tem-se

$$\lambda v = \lambda^2 v \Leftrightarrow \lambda(1-\lambda) v = \mathbf{0} \underset{v \neq \mathbf{0}}{\Leftrightarrow} (\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = 1).$$

Logo, os valores próprios de T são 0 e 1.

(ii) Tem-se

$$T^2 = T \Leftrightarrow (T - I)T = \mathbf{0}$$

logo, para todo o $u \in V$

$$(T - I)(T(u)) = \mathbf{0}(u) = \mathbf{0} \Leftrightarrow T(u) \in \mathcal{N}(T - I)$$

pelo que

$$\mathcal{I}(T) \subset \mathcal{N}(T - I).$$

Seja agora $u \in \mathcal{N}(T - I)$. Logo $(T - I)(u) = \mathbf{0}$, isto é, $T(u) = u$, ou seja $u \in \mathcal{I}(T)$. Deste modo

$$\mathcal{N}(T - I) \subset \mathcal{I}(T)$$

e assim

$$\mathcal{I}(T) = \mathcal{N}(T - I).$$

Por outro lado, sendo $n = \dim V$, atendendo a que

$$n = \dim \underbrace{V}_{\text{espaço de partida}} = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T) =$$

$$= \dim \mathcal{N}(T - 0I) + \dim \mathcal{N}(T - 1I) = m_g(0) + m_g(1)$$

isto é,

$$n = m_g(0) + m_g(1)$$

então T é diagonalizável, uma vez que existirá assim uma base de V formada só com vectores próprios de T.

11. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (x, y, -x - y).$$

(i) Determinemos os valores próprios e os subespaços próprios de T.

Seja $\mathcal{B}_c^3 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$. Seja $A = M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)$. Tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1, 0, 0) = (1, 0, -1)$, $T(0, 1, 0) = (0, 1, -1)$ e $T(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$ constituem respectivamente a 1^a, 2^a e 3^a colunas de A.

Determinemos os valores próprios de T. Os valores próprios de T são os valores próprios de A, isto é, são os valores de λ para os quais $\det(A - \lambda I) = 0$.

O polinómio característico é dado por

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda (1 - \lambda)^2.$$

Logo, os valores próprios de T são

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 1.$$

O subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1} &= \mathcal{N}(T - \lambda_1 I) = \mathcal{N}(A - 0I) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} = L(\{(0, 0, 1)\}). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(0, 0, 1)\}$ é uma base de E_{λ_1}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_1 = 0$ são

$$u = (0, 0, s), \text{ com } s \in \mathbb{R}\backslash \{0\}.$$

O subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$\begin{aligned} E_{\lambda_2} &= \mathcal{N}(T - \lambda_2 I) = \mathcal{N}(A - I) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\right\} = \\ &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -y - z\right\} = \\ &= \{(-y - z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} = L(\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$ é uma base de E_{λ_2}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_2 = 1$ são

$$u = (-s-t, s, t), \text{ com } s, t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

(ii) Tem-se $T^2 = T$, razão pela qual a transformação linear T é uma projecção. Como $\{(-1,1,0),(-1,0,1),(0,0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de T, cujos valores próprios associados são respectivamente 1 e 0, tendo-se

$$\begin{aligned} T(-1,1,0) &= 1(-1,1,0) = (-1,1,0) \\ T(-1,0,1) &= 1(-1,0,1) = (-1,0,1) \\ T(0,0,1) &= 0(0,0,1) = (0,0,0). \end{aligned}$$

Assim, T projecta os elementos de $\mathbb{R}^3$ sobre um plano, paralelamente a um vector, sendo o plano dado por:

$$L(\{(-1,1,0),(-1,0,1)\})$$

isto é, por:

$$x + y + z = 0$$

e o vector dado por:

$$(0,0,1).$$

12. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que representa geometricamente a projecção sobre o plano $x + y + z = 0$, paralelamente ao vector $(0,0,1)$.

(i) O plano

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\right\} = L(\{(-1,1,0),(-1,0,1)\})$$

é tal que

$$T(-1,1,0) = (-1,1,0) \quad \text{e} \quad T(-1,0,1) = (-1,0,1)$$

e o vector $(0,0,1)$ é tal que

$$T(0,0,1) = (0,0,0)$$

Ou seja, os vectores que definem o plano são vectores (de $\mathcal{I}(T)$) (linearmente independentes) próprios de T associados ao valor próprio 1 e o vector $(0,0,1)$ é um vector (de $\mathcal{N}(T)$) próprio de T associado ao valor próprio 0.

(ii) Seja $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Como

$$\{(-1,1,0),(-1,0,1),(0,0,1)\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^3$, as coordenadas de (x,y,z) em relação à base ordenada anterior irão ser α, β, γ tais que

$$(x,y,z) = \alpha(-1,1,0) + \beta(-1,0,1) + \gamma(0,0,1).$$

Atendendo a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & x \\ 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & x \\ 0 & -1 & 0 & x+y \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & x \\ 0 & -1 & 0 & x+y \\ 0 & 0 & 1 & x+y+z \end{array}\right]$$

e assim $\gamma = x+y+z$, $\beta = -x-y$, $\alpha = y$. Pelo que

$$T(x,y,z) = yT(-1,1,0) + (-x-y)\,T(-1,0,1) + (x+y+z)\,T(0,0,1) =$$

$$= y(-1,1,0) + (-x-y)\,(-1,0,1) + (x+y+z)\,(0,0,0) =$$

$$= (x,y,-x-y),$$

isto é, a expressão geral de T é dada por:

$$T(x,y,z) = (x,y,-x-y).$$

13. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2$ é representada pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(i) O polinómio característico é dado por

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 = \lambda^2 - 4\lambda + 4.$$

Os valores próprios de T são os valores próprios de A, isto é, são os valores de λ para os quais $\det(A - \lambda I) = 0$. Logo, o valor próprio de T é

$$\lambda = 2.$$

O subespaço próprio E_λ é dado por

$$\begin{aligned} E_\lambda &= \mathcal{N}(T - \lambda I) = \mathcal{N}(A - 2I) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\right\} = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(1,0)\}\right). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(1,0)\}$ é uma base de E_λ.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda = 2$ são

$$u = (s,0), \text{ com } s \in \mathbb{R} \backslash \{0\}.$$

(ii) Não existe nenhuma base de $\mathbb{R}^2$ constituída só por vectores próprios de T uma vez que $\dim E_\lambda = 1 < 2 = \dim \mathbb{R}^2$. Logo, T não é diagonalizável.

14. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (3x, 2y + z, 2z).$$

Seja $A = M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)$. Tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1, 0, 0) = (3, 0, 0)$, $T(0, 1, 0) = (0, 2, 0)$ e $T(0, 0, 1) = (0, 1, 2)$ constituem respectivamente a 1^a, 2^a e 3^a colunas de A.

(i) O polinómio característico é dado por

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda)^2 = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12.$$

Os valores próprios de T são os valores próprios de A, isto é, são os valores de λ para os quais $\det(A - \lambda I) = 0$. Logo, os valores próprios de T são

$$\lambda_1 = 3 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 2.$$

O subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1} &= \mathcal{N}(T - \lambda_1 I) = \mathcal{N}(A - \lambda_1 I) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \{(x, y, z) : y = z = 0\} = \\ &= \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\} = L(\{(1, 0, 0)\}). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(1, 0, 0)\}$ é uma base de E_{λ_1}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_1 = 3$ são

$$u = (s, 0, 0), \ \text{com} \ s \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

O subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$\begin{aligned} E_{\lambda_2} &= \mathcal{N}(T - \lambda_2 I) = \mathcal{N}(A - \lambda_2 I) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \{(x, y, z) : x = z = 0\} = \\ &= \{(0, y, 0) : y \in \mathbb{R}\} = L(\{(0, 1, 0)\}). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(0, 1, 0)\}$ é uma base de E_{λ_2}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_2 = 2$ são

$$u = (0, s, 0), \ \text{com} \ s \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

(ii) Não existe nenhuma base de $\mathbb{R}^3$ constituída só por vectores próprios de T uma vez que

$$\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3.$$

Logo, a matriz A não é diagonalizável, isto é, não existe nenhuma base de $\mathbb{R}^3$ em relação à qual T possa ser representada por uma matriz diagonal.

15. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (y + z, 2y + z, y + 2z).$$

Seja $A = M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)$. Tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$, $T(0, 1, 0) = (1, 2, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (1, 1, 2)$ constituem respectivamente a 1^a, 2^a e 3^a colunas de A.

(i) O polinómio característico é dado por

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\,(2-\lambda)^2 + \lambda = -\lambda\left[(2-\lambda)^2 - 1\right] = \\ &= -\lambda\left[((2-\lambda)-1)\,((2-\lambda)+1)\right] = -\lambda\,(1-\lambda)\,(3-\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda. \end{aligned}$$

(ii) Os valores próprios de T são os valores próprios de A, isto é, são os valores de λ para os quais $\det(A - \lambda I) = 0$. Logo, os valores próprios de T são

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1 \quad \text{e} \quad \lambda_3 = 3.$$

O subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1} &= \mathcal{N}(T - \lambda_1 I) = \mathcal{N}(A - \lambda_1 I) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \{(x, y, z) : y = z = 0\} = \\ &= \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\} = L(\{(1, 0, 0)\}). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(1, 0, 0)\}$ é uma base de E_{λ_1}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_1 = 0$ são

$$u = (s, 0, 0), \text{ com } s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

O subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_2} &= \mathcal{N}(T-\lambda_2 I)=\mathcal{N}(A-\lambda_2 I)= \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)= \\
&= \{(x,y,z): -x+y+z=0 \ \text{ e } \ y+z=0\}= \\
&= \{(x,y,z): x=0 \ \text{ e } \ y+z=0\}= \\
&= \{(0,-z,z): z\in\mathbb{R}\}=L(\{(0,-1,1)\}).
\end{aligned}$$

O conjunto $\{(0,-1,1)\}$ é uma base de E_{λ_2}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_2=1$ são

$$u=(0,-s,s), \ \text{ com } \ s\in\mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

O subespaço próprio E_{λ_3} é dado por

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_3} &= \mathcal{N}(T-\lambda_3 I)=\mathcal{N}(A-\lambda_3 I)= \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)= \\
&= \{(x,y,z): -3x+y+z=0 \ \text{ e } \ -y+z=0\}= \\
&= \left\{(x,y,z): x=\frac{2}{3}z \ \text{ e } \ y=z\right\}= \\
&= \left\{\left(\frac{2}{3}z,z,z\right): z\in\mathbb{R}\right\}=L(\{(2,3,3)\}).
\end{aligned}$$

O conjunto $\{(2,3,3)\}$ é uma base de E_{λ_3}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_3=3$ são

$$u=(2s,3s,3s), \ \text{ com } \ s\in\mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

(iii) É possível ter uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída só por vectores próprios de T:

$$\mathcal{B}_{vp}=\{(1,0,0),(0,-1,1),(2,3,3)\},$$

uma vez que

$$\dim E_{\lambda_1}+\dim E_{\lambda_2}+\dim E_{\lambda_3}=3=\dim\mathbb{R}^3.$$

Logo, a matriz que representa T na base $\mathcal{B}_{vp}$ é dada por

$$M(T;\mathcal{B}_{vp};\mathcal{B}_{vp})=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix},$$

uma vez que

$$T(1,0,0)=(0,0,0)=0(1,0,0)+0(0,-1,1)+0\,(2,3,3),$$

$$T(0,-1,1) = (0,-1,1) = 0(1,0,0) + 1(0,-1,1) + 0\,(2,3,3)$$

e

$$T\,(2,3,3) = (6,9,9) = 0(1,0,0) + 0(0,-1,1) + 3\,(2,3,3)\,.$$

Deste modo, $(\lambda_1, 0, 0)$, $(0, \lambda_2, 0)$ e $(0, 0, \lambda_3)$ constituem respectivamente a 1^a, 2^a e 3^a colunas de $M(T; \mathcal{B}_{vp}; \mathcal{B}_{vp})$.

(iv) Seja A a matriz que representa T na base canónica de $\mathbb{R}^3$, isto é, $A = M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)$. Tem-se, por **(iii)**,

$$M(T; \mathcal{B}_{vp}; \mathcal{B}_{vp}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Logo, atendendo ao diagrama

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c^3) & \xrightarrow[T]{A} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c^3) \\ \left(S_{\mathcal{B}_c^3 \to \mathcal{B}_{vp}}\right)^{-1} \uparrow I & & I \downarrow S_{\mathcal{B}_c^3 \to \mathcal{B}_{vp}} \\ (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_{vp}) & \xrightarrow[M(T;\mathcal{B}_{vp};\mathcal{B}_{vp})]{T} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_{vp}) \end{array}$$

tem-se

$$D = PAP^{-1},$$

com

$$D = M(T; \mathcal{B}_{vp}; \mathcal{B}_{vp}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

com

$$P^{-1} = \left(S_{\mathcal{B}_c^3 \to \mathcal{B}_{vp}}\right)^{-1} = S_{\mathcal{B}_{vp} \to \mathcal{B}_c^3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3).$$

Isto é, a matriz A é diagonalizável e a matriz $M(T; \mathcal{B}_{vp}; \mathcal{B}_{vp})$ é diagonal.

(v) Atendendo a que

$$D = PAP^{-1},$$

tem-se

$$A = P^{-1}DP.$$

Logo,

$$\begin{aligned} A^n &= P^{-1}D^nP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3}3^n & \frac{1}{3}3^n \\ 0 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}3^n & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}3^n \\ 0 & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}3^n & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}3^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e

$$T^n(x,y,z) = A^n \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}3^n y + \frac{1}{3}3^n z \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}3^n\right) y + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}3^n\right) z \\ \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}3^n\right) y + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}3^n\right) z \end{bmatrix},$$

para todo o $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

16. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que em relação à base

$$\mathcal{B} = \{(0,1,0), (1,0,-1), (1,0,1)\}$$

(ordenada) de $\mathbb{R}^3$ é representada pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 10 \end{bmatrix}.$$

Logo, a matriz que representa T em relação à base canónica $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^3$ é dada por:

$$B = M(T;\mathcal{B}_c;\mathcal{B}_c) = S_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}_c} \begin{bmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 10 \end{bmatrix} (S_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}_c})^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 3 & -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Note que deste modo, para todo o $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tem-se

$$T(x,y,z) = B \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (9x, 3x + 7y - z, 3x - 2y + 8z).$$

(i) O polinómio característico é dado por

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 7-\lambda & -1 \\ 3 & -2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)\left[(7-\lambda)(8-\lambda) - 2\right] = \\ &= (9-\lambda)\left(\lambda^2 - 15\lambda + 54\right) = (9-\lambda)(\lambda-9)(\lambda-6) = \\ &= -(\lambda-9)^2(\lambda-6). \end{aligned}$$

(ii) Os valores próprios de T são os valores próprios de B, isto é, são os valores de λ para os quais $\det(B - \lambda I) = 0$. Logo, os valores próprios de T são

$$\lambda_1 = 9 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 6.$$

O subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_1} &= \mathcal{N}\left(T-\lambda_1 I\right) = \mathcal{N}\left(B-\lambda_1 I\right) = \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}\right) = \\
&= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x-2y-z=0\right\} = \\
&= \left\{(x,y,3x-2y) : x,y \in \mathbb{R}\right\} = L\left(\left\{(1,0,3),(0,1,-2)\right\}\right).
\end{aligned}$$

O conjunto $\{(1,0,3),(0,1,-2)\}$ é uma base de E_{λ_1}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_1 = 9$ são

$$u = (s,t,3s-2t), \text{ com } s,t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

O subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_2} &= \mathcal{N}\left(T-\lambda_2 I\right) = \mathcal{N}\left(B-\lambda_2 I\right) = \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \\
&= \left\{(x,y,z) : 3x=0 \text{ e } y-z=0\right\} = \\
&= \left\{(0,z,z) : z \in \mathbb{R}\right\} = L\left(\left\{(0,1,1)\right\}\right).
\end{aligned}$$

O conjunto $\{(0,1,1)\}$ é uma base de E_{λ_2}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_2 = 6$ são

$$u = (0,s,s), \text{ com } s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

(iii) É possível ter uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída só por vectores próprios de T:

$$\mathcal{B}_{vp} = \{(1,0,3),(0,1,-2),(0,1,1)\},$$

uma vez que

$$\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} = 3 = \dim \mathbb{R}^3.$$

Logo, a matriz que representa T na base $\mathcal{B}_{vp}$ é dada por

$$M(T;\mathcal{B}_{vp};\mathcal{B}_{vp}) = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

uma vez que

$$T(1,0,3) = (9,0,27) = 9(1,0,3) + 0(0,1,-2) + 0(0,1,1),$$

$$T(0,1,-2) = (0,9,-18) = 0(1,0,3) + 9(0,1,-2) + 0(0,1,1)$$

e

$$T(0,1,1) = (0,6,6) = 0(1,0,3) + 0(0,1,-2) + 6(0,1,1).$$

Deste modo, $(\lambda_1, 0, 0)$, $(0, \lambda_2, 0)$ e $(0, 0, \lambda_3)$ constituem respectivamente a 1^a, 2^a e 3^a colunas de $M(T; \mathcal{B}_{vp}; \mathcal{B}_{vp})$.

Logo, atendendo ao diagrama

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c^3) & \xrightarrow[T]{B} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c^3) \\ \left(S_{\mathcal{B}_c^3 \to \mathcal{B}_{vp}}\right)^{-1} \uparrow I & & I \downarrow S_{\mathcal{B}_c^3 \to \mathcal{B}_{vp}} \\ (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_{vp}) & \xrightarrow[M(T;\mathcal{B}_{vp};\mathcal{B}_{vp})]{T} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_{vp}) \end{array}$$

tem-se

$$D = PBP^{-1},$$

com

$$D = M(T; \mathcal{B}_{vp}; \mathcal{B}_{vp}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$

com

$$P^{-1} = \left(S_{\mathcal{B}_c^3 \to \mathcal{B}_{vp}}\right)^{-1} = S_{\mathcal{B}_{vp} \to \mathcal{B}_c^3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3).$$

Isto é, a matriz B é diagonalizável e a matriz $M(T; \mathcal{B}_{vp}; \mathcal{B}_{vp})$ é diagonal.

(iv) Atendendo a que

$$D = PBP^{-1},$$

tem-se

$$B = P^{-1}DP.$$

Logo,

$$\begin{aligned} B^n &= P^{-1}D^nP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9^n & 0 & 0 \\ 0 & 9^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9^n & 0 & 0 \\ 0 & 9^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & -1/3 \\ -1 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 9^n & 0 & 0 \\ 0 & 9^n & 6^n \\ 9^n3 & 9^n(-2) & 6^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & -1/3 \\ -1 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 9^n & 0 & 0 \\ 9^n - 6^n & \frac{1}{3}9^n + \frac{2}{3}6^n & -\frac{1}{3}9^n + \frac{1}{3}6^n \\ 9^n - 6^n & -\frac{2}{3}9^n + \frac{2}{3}6^n & \frac{2}{3}9^n + \frac{1}{3}6^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e

$$A^n = \left(S_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}_c}\right)^{-1} B^n S_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}_c} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 9^n & 0 & 0 \\ 9^n - 6^n & \frac{1}{3}9^n + \frac{2}{3}6^n & -\frac{1}{3}9^n + \frac{1}{3}6^n \\ 9^n - 6^n & -\frac{2}{3}9^n + \frac{2}{3}6^n & \frac{2}{3}9^n + \frac{1}{3}6^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{3}6^n + \frac{1}{3}9^n & \frac{4}{3}9^n - \frac{4}{3}6^n & \frac{2}{3}9^n - \frac{2}{3}6^n \\ \frac{1}{3}9^n - \frac{1}{3}6^n & \frac{2}{3}6^n + \frac{1}{3}9^n & \frac{1}{3}6^n - \frac{1}{3}9^n \\ \frac{1}{3}6^n - \frac{1}{3}9^n & \frac{2}{3}9^n - \frac{2}{3}6^n & \frac{4}{3}9^n - \frac{1}{3}6^n \end{bmatrix}.$$

Por outro lado,

$$T^n(x,y,z) = B^n \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9^n x \\ (9^n - 6^n)\,x + \left(\frac{1}{3}9^n + \frac{2}{3}6^n\right) y + \left(-\frac{1}{3}9^n + \frac{1}{3}6^n\right) z \\ (9^n - 6^n)\,x + \left(-\frac{2}{3}9^n + \frac{2}{3}6^n\right) y + \left(\frac{2}{3}9^n + \frac{1}{3}6^n\right) z \end{bmatrix},$$

para todo o $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

17. Sabendo que os vectores $(1,1,1), (1,0,-1)$ e $(1,-1,0)$ são vectores próprios da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix},$$

existem λ_1, λ_2 e $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$(1,1,1) \in \mathcal{N}(A - \lambda_1 I), \quad (1,0,-1) \in \mathcal{N}(A - \lambda_2 I) \quad \text{e} \quad (1,-1,0) \in \mathcal{N}(A - \lambda_3 I),$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & 1 & 1 \\ a & b-\lambda_1 & c \\ d & e & f-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_2 & 1 & 1 \\ a & b-\lambda_2 & c \\ d & e & f-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_3 & 1 & 1 \\ a & b-\lambda_3 & c \\ d & e & f-\lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, tem-se respectivamente

$$\begin{cases} 3 - \lambda_1 = 0 \\ \\ a + b + c - \lambda_1 = 0 \\ \\ d + e + f - \lambda_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \\ a + b + c = 3 \\ \\ d + e + f = 3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\lambda_2 = 0 \\ \\ a - c = 0 \\ \\ d - f + \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \\ a = c \\ \\ d = f \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -\lambda_3 = 0 \\ \\ a - b + \lambda_3 = 0 \\ \\ d - e = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \\ a = b \\ \\ d = e. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \\ \lambda_2 = 0 \\ \\ \lambda_3 = 0 \\ \\ a = b = c = d = e = f = 1. \end{cases}$$

18. Considere a transformação linear $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por

$$T(A) = A + A^T.$$

(i) Seja

$$\mathcal{B}_c^{2\times 2} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

a base canónica (ordenada) de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

A matriz $M(T; \mathcal{B}_c^{2\times 2}; \mathcal{B}_c^{2\times 2})$ que representa T em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^{2\times 2}$ é dada por

$$M(T; \mathcal{B}_c^{2\times 2}; \mathcal{B}_c^{2\times 2}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

uma vez que

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(ii) Seja $A = M(T; \mathcal{B}_c^{2\times 2}; \mathcal{B}_c^{2\times 2})$. O polinómio característico é dado por

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 \left[(1-\lambda)^2 - 1\right] = \\
&= (2-\lambda)^2 \left[((1-\lambda)-1)((1-\lambda)+1)\right] = \\
&= -\lambda (2-\lambda)^3 .
\end{aligned}$$

Os valores próprios de T são os valores próprios de A, isto é, são os valores de λ para os quais $\det(A - \lambda I) = 0$. Logo, os valores próprios de T são

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 2.$$

O subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_1} &= \mathcal{N}(T - \lambda_1 I) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : (T - \lambda_1 I)\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) - \lambda_1 I\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \begin{bmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_1 a & \lambda_1 b \\ \lambda_1 c & \lambda_1 d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \begin{bmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \begin{bmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : 2a = 0 \text{ e } b + c = 0 \text{ e } 2d = 0 \right\} = \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : c \in \mathbb{R} \right\} = \\
&= L\left(\left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \right).
\end{aligned}$$

O conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base de E_{λ_1}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_1 = 0$ são

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -s \\ s & 0 \end{bmatrix}, \text{ com } s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

O subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_2} &= \mathcal{N}(T-\lambda_2 I) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : (T-\lambda_2 I)\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) - \lambda_2 I\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \begin{bmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_2 a & \lambda_2 b \\ \lambda_2 c & \lambda_2 d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \begin{bmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \begin{bmatrix} 0 & -b+c \\ -c+b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : b = c \right\} = \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & c \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a, c, d \in \mathbb{R} \right\} = \\
&= L\left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \right).
\end{aligned}$$

O conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base de E_{λ_2}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_2 = 2$ são

$$U = \begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix}, \text{ com } r, s, t \in \mathbb{R} \backslash \{0\}.$$

(iii) É possível ter uma base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ constituída só por vectores próprios de T:

$$\mathcal{B}_{vp} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

uma vez que

$$\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} = 4 = \dim \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

Logo, a matriz que representa T na base $\mathcal{B}_{vp}$ é dada por

$$M(T; \mathcal{B}_{vp}; \mathcal{B}_{vp}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

uma vez que

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Deste modo, $(\lambda_2, 0, 0, 0)$, $(0, \lambda_2, 0, 0)$, $(0, 0, \lambda_1, 0)$ e $(0, 0, 0, \lambda_2)$ constituem respectivamente a 1^a, 2^a, 3^a e 4^a colunas de $M(T; \mathcal{B}_{vp}; \mathcal{B}_{vp})$.

Logo, atendendo ao diagrama

$$\begin{array}{ccc}
(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \mathcal{B}_c^{2\times 2}) & \xrightarrow[T]{A} & (\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \mathcal{B}_c^{2\times 2}) \\
\left(S_{\mathcal{B}_c^{2\times 2}\to\mathcal{B}_{vp}}\right)^{-1} \uparrow I & & I \downarrow S_{\mathcal{B}_c^{2\times 2}\to\mathcal{B}_{vp}} \\
(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \mathcal{B}_{vp}) & \xrightarrow[M(T;\mathcal{B}_{vp};\mathcal{B}_{vp})]{T} & (\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \mathcal{B}_{vp})
\end{array}$$

tem-se

$$D = PAP^{-1},$$

com

$$D = M(T; \mathcal{B}_{vp}; \mathcal{B}_{vp}) = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

com

$$P^{-1} = \left(S_{\mathcal{B}_c^{2\times 2}\to\mathcal{B}_{vp}}\right)^{-1} = S_{\mathcal{B}_{vp}\to\mathcal{B}_c^{2\times 2}} \quad \text{e} \quad A = M(T; \mathcal{B}_c^{2\times 2}; \mathcal{B}_c^{2\times 2}).$$

Isto é, a matriz A é diagonalizável e a matriz $M(T; \mathcal{B}_{vp}; \mathcal{B}_{vp})$ é diagonal.

19. (i) Seja

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Tem-se

$$\det(A_1 - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 12 = (3-\lambda)(4-\lambda).$$

Os valores próprios de A_1 são

$$\lambda_1 = 3 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 4.$$

O subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_1} &= \mathcal{N}(A - \lambda_1 I) = \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda_1 & 1 \\ -2 & 5-\lambda_1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\right) = \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x + y = 0\right\} = \\
&= \{(y, y) : y \in \mathbb{R}\} = L(\{(1, 1)\}).
\end{aligned}$$

O conjunto $\{(1,1)\}$ é uma base de E_{λ_1}.

Os vectores próprios de A_1 associados ao valor próprio $\lambda_1 = 3$ são

$$u = (s,s), \text{ com } s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

O subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_2} &= \mathcal{N}(A_2 - \lambda_2 I) = \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda_2 & 1 \\ -2 & 5-\lambda_2 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\right) = \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2x + y = 0\right\} = \\
&= \{(x,2x) : x \in \mathbb{R}\} = L(\{(1,2)\}).
\end{aligned}$$

O conjunto $\{(1,2)\}$ é uma base de E_{λ_2}.

Os vectores próprios de A_1 associados ao valor próprio $\lambda_2 = 4$ são

$$u = (s,2s), \text{ com } s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

É possível ter uma base de $\mathbb{R}^2$ constituída só por vectores próprios de A_1:

$$\mathcal{B}_{vp} = \{(1,1),(1,2)\},$$

uma vez que

$$\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} = 2.$$

Logo, a matriz A_1 é diagonalizável e tem-se

$$D_1 = P_1 A_1 P_1^{-1},$$

com

$$P_1^{-1} = S_{\mathcal{B}_{vp} \to \mathcal{B}_c^2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

e

$$D_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

(ii) Seja

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Tem-se

$$\begin{aligned}
\det(A_2 - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left[(3-\lambda)^2 - 1\right] = \\
&= (2-\lambda)[(3-\lambda)-1][(3-\lambda)+1] = (2-\lambda)^2(4-\lambda).
\end{aligned}$$

Os valores próprios de A_2 são

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 4.$$

O subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_1} &= \mathcal{N}\left(A_2 - \lambda_1 I\right) = \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda_1 & 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda_1 & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda_1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0\right\} = \\
&= \{(x,-z,z) : x, z \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(1,0,0),(0,-1,1)\}\right).
\end{aligned}$$

O conjunto $\{(1,0,0),(0,-1,1)\}$ é uma base de E_{λ_1}.

Os vectores próprios de A_2 associados ao valor próprio $\lambda_1 = 2$ são

$$u = (s,-t,t), \text{ com } s,t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

O subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_2} &= \mathcal{N}\left(A_2 - \lambda_2 I\right) = \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda_2 & 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda_2 & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda_2 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2x + y + z = 0 \text{ e } -y + z = 0\right\} = \\
&= \{(z,z,z) : z \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(1,1,1)\}\right).
\end{aligned}$$

O conjunto $\{(1,1,1)\}$ é uma base de E_{λ_2}.

Os vectores próprios de A_2 associados ao valor próprio $\lambda_2 = 4$ são

$$u = (s,s,s), \text{ com } s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

É possível ter uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída só por vectores próprios de A_2:

$$\mathcal{B}_{vp} = \{(1,0,0),(0,-1,1),(1,1,1)\},$$

uma vez que

$$\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} = 3.$$

Logo, a matriz A_2 é diagonalizável e tem-se

$$D_2 = P_2 A_2 P_2^{-1},$$

com

$$P_2^{-1} = S_{\mathcal{B}_{vp} \to \mathcal{B}_c^3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$D_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

(iii) Seja

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tem-se

$$\begin{aligned} \det(A_3 - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 1\right] = \\ &= (-\lambda)\left[(1-\lambda)-1\right]\left[(1-\lambda)+1\right] = \lambda^2 (2-\lambda). \end{aligned}$$

Os valores próprios de A_3 são

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 2.$$

O subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1} &= \mathcal{N}(A_3 - \lambda_1 I) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\right\} = \\ &= \{(-y,y,z) : y,z \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(-1,1,0),(0,0,1)\}\right). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(-1,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base de E_{λ_1}.

Os vectores próprios de A_2 associados ao valor próprio $\lambda_1 = 0$ são

$$u = (-s,s,t), \ \text{ com } \ s,t \in \mathbb{R}\backslash \{0\}.$$

O subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$\begin{aligned} E_{\lambda_2} &= \mathcal{N}(A_2 - \lambda_2 I) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda_2 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x + y = 0 \ \text{ e } \ -2z = 0\right\} = \\ &= \{(y,y,0) : y \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(1,1,0)\}\right). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(1,1,0)\}$ é uma base de E_{λ_2}.

Os vectores próprios de A_3 associados ao valor próprio $\lambda_2 = 2$ são

$$u = (s, s, 0), \text{ com } s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

É possível ter uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída só por vectores próprios de A_3:

$$\mathcal{B}_{vp} = \{(-1,1,0), (0,0,1), (1,1,0)\},$$

uma vez que

$$\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} = 3.$$

Logo, a matriz A_3 é diagonalizável e tem-se

$$D_3 = P_3 A_3 P_3^{-1},$$

com

$$P_3^{-1} = S_{\mathcal{B}_{vp}\to\mathcal{B}_c^3} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D_3 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

20. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ que em relação à base canónica de $\mathbb{R}^4$ é representada pela matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{bmatrix},$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Determinemos os valores próprios de T. Tem-se

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ a & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & b & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & c & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^4 = \lambda^4.$$

O valor próprio de T é $\lambda = 0$.

O subespaço próprio E_λ é dado por

$$\begin{aligned} E_\lambda &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ a & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & b & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & c & -\lambda \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : ax = 0 \text{ e } by = 0 \text{ e } cz = 0\right\}. \end{aligned}$$

Assim, para que exista uma base de $\mathbb{R}^4$ constituída só por vectores próprios de T é necessário que se tenha

$$a = b = c = 0.$$

Caso contrário, teríamos
$$\dim E_\lambda < 4.$$

21. (i) Como
$$Au_1 = (\alpha+1)u_1$$
e
$$Au_2 = (\alpha-1)u_2$$
então u_1, u_2 são vectores próprios de A, associados respectivamente aos valores próprios $\alpha+1$ e $\alpha-1$.

(ii)

$$p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = (3-\lambda)\left[(\alpha-\lambda)^2-1\right] = (3-\lambda)(\lambda-\alpha-1)(\lambda-\alpha+1).$$

Para ($\alpha+1 \neq 3$ e $\alpha-1 \neq 3$) $\Leftrightarrow \alpha \notin \{2,4\}$ os valores próprios de A: $3, \alpha+1$ e $\alpha-1$ são todos distintos.

(iii) Para $\alpha \notin \{2,4\}$, $\{u_1\}$, $\{u_2\}$ e $\{(3-\alpha, \alpha^2-6\alpha+8, 1)\}$ são bases de $E_{\alpha+1}$, $E_{\alpha-1}$ e E_3, respectivamente.
Para $\alpha = 2$, $E_3 = E_{\alpha+1}$. Além disso, $\{u_2\}$ é uma base de $E_{\alpha-1}$ e $\{u_1\}$ é uma base de E_3.
Para $\alpha = 4$, $E_3 = E_{\alpha-1}$. Além disso, $\{u_2\}$ é uma base de E_3 e $\{u_1\}$ é uma base de $E_{\alpha+1}$.

(iv) Para $\alpha \notin \{2,4\}$ a matriz A é diagonalizável, pois os seus valores próprios são todos distintos. Se $\alpha = 2$ ou $\alpha = 4$ então 3 é valor próprio de A e $m_g(3) = 1 < 2 = m_a(3)$, pelo que A não é diagonalizável. Logo A é diagonalizável $\Leftrightarrow \alpha \notin \{2,4\}$.

22. a) e b) Seja $\mathcal{B}_c^3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$. Seja $A = M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)$. Tem-se
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
uma vez que $T(1,0,0) = (1,0,2)$, $T(0,1,0) = (0,1,0)$ e $T(0,0,1) = (2,0,1)$ constituem respectivamente a 1^a, 2^a e 3^a colunas de A.

Determinemos os valores próprios de T. Os valores próprios de T são os valores próprios de A, isto é, são os valores de λ para os quais $\det(A-\lambda I) = 0$.

O polinómio característico é dado por

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 4\right] = (1-\lambda)(-1-\lambda)(3-\lambda).$$

Logo, os valores próprios de T são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_2 = 3$

O subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$E_{\lambda_1} = \mathcal{N}(T - \lambda_1 I) = \mathcal{N}(A - I) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = L(\{(0,1,0)\}).$$

O conjunto $\{(0,1,0)\}$ é uma base de E_{λ_1}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_1 = 1$ são $u = (0,s,0)$, com $s \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

O subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$E_{\lambda_2} = \mathcal{N}(T - \lambda_2 I) = \mathcal{N}(A + I) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = L(\{(-1,0,1)\}).$$

O conjunto $\{(-1,0,1)\}$ é uma base de E_{λ_2}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_2 = -1$ são $u = (-s,0,s)$, com $s \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

O subespaço próprio E_{λ_3} é dado por

$$E_{\lambda_3} = \mathcal{N}(T - \lambda_3 I) = \mathcal{N}(A - 3I) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = \{(x,0,x) : x \in \mathbb{R}\} = L(\{(1,0,1)\}).$$

O conjunto $\{(1,0,1)\}$ é uma base de E_{λ_3}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_3 = 3$ são $u = \{(s,0,s)\}$, com $s \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Como 0 não é valor próprio de T então T é invertível. Como T tem 3 valores próprios distintos, os vectores próprios associados serão linearmente independentes, pelo que existirá uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios, por exemplo:

$$\{(0,1,0), (-1,0,1), (1,0,1)\}.$$

Isto é, T é representada em relação à base anterior pela matriz diagonal: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

23. a) O polinómio caracterísico de A é

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 1^2\right] = -\lambda(\lambda-2)^2,$$

donde $\{0,2\}$ é o conjunto dos valores próprios de A com $m_a(0) = 1$ e $m_a(2) = 2$.

b) $\{(1,0,-1)\}$ é uma base para o espaço próprio $E_0 = \mathcal{N}(A)$ e $\{(1,0,1),(0,1,0)\}$ é uma base para o espaço próprio

$$E_2 = \mathcal{N}(A-2I) = \mathcal{N}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Portanto $\{(1,0,-1),(1,0,1),(0,1,0)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores próprios de A.

c) $(1,0,-1)$ é vector próprio da matriz A pela alínea b), mas não é vector próprio da transformação linear T, pois

$$T(1,0,-1) = (2,2,0);$$

note que

$$T(1,0,-1) = T\left[1(1,0,0) + 1(1,1,0) - 1(1,1,1)\right] =$$
$$= T(1,0,0) + T(1,1,0) - T(1,1,1) = T(1,1,0) = 2(1,1,0).$$

d) $(1,0,0)$ é uma solução particular de

$$T(x,y,z) = (1,0,1),$$

i.e. $T(1,0,0) = (2,1,1)$. Por outro lado $\{(-1,0,1)\}$ é uma base para $\mathcal{N}(A)$ e portanto $\{(0,1,1)\}$ é uma base para $\mathcal{N}(T)$, pois

$$(0,1,1) = -1(1,0,0) + 0(1,1,0) + 1(1,1,1).$$

Logo a solução geral da equação linear $T(x,y,z) = (1,0,1)$ é:

$$(1,0,0) + c(0,1,1) = (1,c,c), \qquad c \in \mathbb{R}.$$