Instituto Superior Técnico - Álgebra Linear - 1^o Semestre 2011/2012

LEAN - LEMat - MEAmbi - MEBiol - MEQ

Resolução da 6^a Ficha de exercícios

1. **(i)** Consideremos a aplicação $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2,$$

com $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Por exemplo

$$\langle (1,1), (1,0) + (1,0) \rangle = \langle (1,1), (2,0) \rangle = 4 \neq 2 = \langle (1,1), (1,0) \rangle + \langle (1,1), (1,0) \rangle .$$

Logo, esta aplicação $\langle , \rangle$ não é um produto interno, uma vez que a condição de linearidade não é verificada.

(ii) Consideremos a aplicação $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 3 x_2 y_2,$$

com $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Tem-se

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

e como $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ é simétrica e os seus valores próprios ($\sqrt{2} + 2$ e $2 - \sqrt{2}$) são todos positivos, logo, a aplicação $\langle , \rangle$ define um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

Resolução alternativa: Para todos os $(x_1, x_2), (x_1', x_2'), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$\begin{aligned}
\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle &= x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 3 x_2 y_2 = \\
&= y_1 x_1 - y_1 x_2 - y_2 x_1 + 3 y_2 x_2 = \\
&= y_1 x_1 - y_2 x_1 - y_1 x_2 + 3 y_2 x_2 = \\
&= \langle (y_1, y_2), (x_1, x_2) \rangle .
\end{aligned}$$

$$\left\langle (x_1, x_2) + (x_1', x_2'), (y_1, y_2) \right\rangle = \left\langle (x_1 + x_1', x_2 + x_2'), (y_1, y_2) \right\rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= (x_1 + x_1') y_1 - (x_2 + x_2') y_1 - (x_1 + x_1') y_2 + 3 (x_2 + x_2') y_2 = \\
&= x_1 y_1 + x_1' y_1 - x_2 y_1 - x_2' y_1 - x_1 y_2 - x_1' y_2 + 3 x_2 y_2 + 3 x_2' y_2 = \\
&= x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 3 x_2 y_2 + x_1' y_1 - x_2' y_1 - x_1' y_2 + 3 x_2' y_2 = \\
&= \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle + \left\langle (x_1', x_2'), (y_1, y_2) \right\rangle .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \lambda(x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle &= \langle (\lambda x_1,\lambda x_2),(y_1,y_2)\rangle = \\
&= \lambda x_1y_1 - \lambda x_2y_1 - \lambda x_1y_2 + 3\lambda x_2y_2 = \\
&= \lambda(x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_2) = \\
&= \lambda \langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle .
\end{aligned}$$

$$\langle (x_1,x_2),(x_1,x_2)\rangle = x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 = (x_1-x_2)^2 + (\sqrt{2}x_2)^2 \geq 0$$

e

$$\begin{aligned}
\langle (x_1,x_2),(x_1,x_2)\rangle &= 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2 = 0 \ \text{ e } \ \sqrt{2}x_2 = 0) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x_1 = x_2 \ \text{ e } \ x_2 = 0) \\
&\Leftrightarrow (x_1 = 0 \ \text{ e } \ x_2 = 0).
\end{aligned}$$

Logo:

$$\langle (x_1,x_2),(x_1,x_2)\rangle > 0,$$

para todo o $(x_1,x_2) \neq (0,0)$.

Assim, a aplicação $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_2$$

é um produto interno.

(iii) Consideremos a aplicação $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = -2x_1y_1 + 3x_2y_2,$$

com $(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Tem-se

$$\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Como os valores próprios de $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ não são todos positivos (-2 e 3), logo, a aplicação $\langle , \rangle$ não define um produto interno em $\mathbb{R}^2$, uma vez que a condição de positividade não é satisfeita.

Resolução alternativa: Vejamos que a condição de positividade não é satisfeita.

$$\langle (x_1,x_2),(x_1,x_2)\rangle = 0 \Leftrightarrow -2x_1^2 + 3x_2^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\,|x_2|\,.$$

Logo, por exemplo tem-se:

$$\left\langle \left(\sqrt{\frac{3}{2}},1\right),\left(\sqrt{\frac{3}{2}},1\right)\right\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \left(\sqrt{\frac{3}{2}},1\right) \neq (0,0).$$

Assim, a condição:

$$\langle (x_1,x_2),(x_1,x_2)\rangle > 0,\ \forall (x_1,x_2) \neq (0,0)$$

não é satisfeita. Logo, a aplicação $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = -2x_1y_1 + 3x_2y_2$$

não é um produto interno.

2. **(i)** Consideremos a aplicação $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida por

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3,$$

com $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.

Tem-se

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

e como $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é simétrica e os seus valores próprios (1) são todos positivos, logo, a aplicação $\langle , \rangle$ define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

Resolução alternativa: Para todos os $(x_1, x_2, x_3), (x_1', x_2', x_3')(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$\begin{aligned} \langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = \\ &= y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 = \\ &= \langle (y_1, y_2, y_3), (x_1, x_2, x_3) \rangle . \end{aligned}$$

$$\left\langle (x_1, x_2, x_3) + (x_1', x_2', x_3'), (y_1, y_2, y_3) \right\rangle =$$

$$\begin{aligned} &= \left\langle (x_1 + x_1', x_2 + x_2', x_3 + x_3'), (y_1, y_2, y_3) \right\rangle = \\ &= (x_1 + x_1')y_1 + (x_2 + x_2')y_2 + (x_3 + x_3')y_3 = \\ &= x_1y_1 + x_1'y_1 + x_2y_2 + x_2'y_2 + x_3y_3 + x_3'y_3 = \\ &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_1'y_1 + x_2'y_2 + x_3'y_3 = \\ &= \langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle + \left\langle (x_1', x_2', x_3'), (y_1, y_2, y_3) \right\rangle . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \lambda(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle &= \langle \lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = \\ &= \lambda x_1y_1 + \lambda x_2y_2 + \lambda x_3y_3 = \\ &= \lambda(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) = \\ &= \lambda \langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle . \end{aligned}$$

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3) \rangle = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0$$

e

$$\langle (x_1,x_2,x_3),(x_1,x_2,x_3)\rangle = 0 \Leftrightarrow (x_1 = 0 \ \text{ e } \ x_2 = 0 \ \text{ e } \ x_3 = 0).$$

Logo:

$$\langle (x_1,x_2,x_3),(x_1,x_2,x_3)\rangle > 0, \ \forall (x_1,x_2,x_3) \neq (0,0,0).$$

Assim, a aplicação $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida por

$$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

é um produto interno, o chamado produto interno usual de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Consideremos a aplicação $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida por

$$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = x_1y_2 - x_2y_1.$$

Tem-se

$$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

e como $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ não é simétrica, logo, a aplicação $\langle , \rangle$ não define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

Resolução alternativa: Por exemplo

$$\langle (1,1,1),(1,0,0)\rangle = -1 \neq 1 = \langle (1,0,0),(1,1,1)\rangle .$$

Logo, esta aplicação $\langle , \rangle$ não é um produto interno, uma vez que a condição de simetria não é verificada.

(iii) Consideremos a aplicação $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida por

$$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = 2x_1y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3,$$

com $(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3$.

Tem-se

$$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

e como $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é simétrica e os seus valores próprios

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\left[(2-\lambda)(1-\lambda)-1\right] = (2-\lambda)\left(\lambda^2-3\lambda+1\right) =$$
$$= (2-\lambda)\left(\lambda-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(\lambda-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

$(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}, 2\ )$ são todos positivos, logo, a aplicação $\langle , \rangle$ define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

Resolução alternativa: Para todos os $(x_1, x_2, x_3), (x_1^{'}, x_2^{'}, x_3^{'})(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$\begin{aligned} \langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle &= 2x_1y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 = \\ &= 2y_1x_1 + y_3x_1 + y_1x_3 + 2y_2x_2 + y_3x_3 = \\ &= \langle (y_1,y_2,y_3),(x_1,x_2,x_3)\rangle . \end{aligned}$$

$$\left\langle (x_1,x_2,x_3)+(x_1^{'},x_2^{'},x_3^{'}),(y_1,y_2,y_3)\right\rangle = \left\langle (x_1+x_1^{'},x_2+x_2^{'},x_3+x_3^{'}),(y_1,y_2,y_3)\right\rangle =$$

$$\begin{aligned} &= 2(x_1+x_1^{'})y_1 + (x_1+x_1^{'})y_3 + (x_3+x_3^{'})y_1 + 2(x_2+x_2^{'})y_2 + (x_3+x_3^{'})y_3 = \\ &= 2x_1y_1 + 2x_1^{'}y_1 + x_1y_3 + x_1^{'}y_3 + x_3y_1 + x_3^{'}y_1 + 2x_2y_2 + 2x_2^{'}y_2 + x_3y_3 + x_3^{'}y_3 = \\ &= 2x_1y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_1^{'}y_1 + x_1^{'}y_3 + x_3^{'}y_1 + 2x_2^{'}y_2 + x_3^{'}y_3 = \\ &= \langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle + \left\langle (x_1^{'},x_2^{'},x_3^{'}),(y_1,y_2,y_3)\right\rangle . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \lambda(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle &= \langle \lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = \\ &= 2\lambda x_1y_1 + \lambda x_1y_3 + \lambda x_3y_1 + 2\lambda x_2y_2 + \lambda x_3y_3 = \\ &= \lambda(2x_1y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3) = \\ &= \lambda\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle (x_1,x_2,x_3),(x_1,x_2,x_3)\rangle &= 2x_1^2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + x_3^2 = \\ &= x_1^2 + (x_1+x_3)^2 + \left(\sqrt{2}x_2\right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle (x_1,x_2,x_3),(x_1,x_2,x_3)\rangle &= 0 \Leftrightarrow (x_1=0 \ \text{ e } \ x_1+x_3=0 \ \text{ e } \ \sqrt{2}x_2=0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x_1=0 \ \text{ e } \ x_2=0 \ \text{ e } \ x_3=0). \end{aligned}$$

Logo:

$$\langle (x_1,x_2,x_3),(x_1,x_2,x_3)\rangle > 0, \ \forall (x_1,x_2,x_3) \neq (0,0,0).$$

Assim, a aplicação $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida por

$$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = 2x_1y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$$

é um produto interno.

3. Sejam $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Consideremos a aplicação $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = \left[\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array}\right] = 3x_1y_1 + 2x_2y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_2.$$

Atendendo a que a matriz $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ é simétrica e tem os seus valores próprios (1 e 5) todos positivos, então esta aplicação define em $\mathbb{R}^2$ um produto interno. Além disso, verifica-se $\langle (1,0),(0,1)\rangle = 2$, uma vez que

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle (1,0),(1,0)\rangle & \langle (1,0),(0,1)\rangle \\ \langle (0,1),(1,0)\rangle & \langle (0,1),(0,1)\rangle \end{bmatrix}.$$

4. Considere os vectores $u = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ e $v = \left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}}\right)$. Considere o produto interno definido em $\mathbb{R}^2$ por

$$\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = 3x_1y_1 + 2x_2y_2.$$

Tem-se

$$\langle u,v\rangle = \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}}\right) \right\rangle = 3\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{2}{\sqrt{30}} + 2\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\frac{3}{\sqrt{30}} = 0$$

e

$$\langle u,u\rangle = 3\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1 \quad \text{e} \quad \langle v,v\rangle = 3\left(\frac{2}{\sqrt{30}}\right)^2 + 2\left(\frac{3}{\sqrt{30}}\right)^2 = 1.$$

Logo, o conjunto $\{u,v\}$ é ortonormado relativamente ao produto interno anterior.

No entanto, relativamente ao produto interno usual $\langle , \rangle'$ definido em $\mathbb{R}^2$:

$$\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle' = x_1y_1 + x_2y_2,$$

tem-se

$$\langle u,v\rangle' = -\frac{1}{\sqrt{150}}, \quad \langle u,u\rangle' = \frac{2}{5} \quad \text{e} \quad \langle v,v\rangle' = \frac{13}{30}.$$

Logo, o conjunto $\{u,v\}$ não é ortonormado relativamente ao produto interno usual definido em $\mathbb{R}^2$.

5. Considere em $\mathbb{R}^4$ o produto interno usual.

Seja $U = L\left(\{(1,0,0,0),(1,0,0,1)\}\right)$. Logo, o subespaço de $\mathbb{R}^4$ ortogonal a U é dado por:

$$U^\perp = \left\{ \begin{array}{c} (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \langle (x,y,z,w),(1,0,0,0)\rangle = 0 \quad \text{e} \\ \langle (x,y,z,w),(1,0,0,1)\rangle = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x = 0 \ \text{ e } \ w = 0\right\} = \left\{(0,y,z,0) \in \mathbb{R}^4 : y,z \in \mathbb{R}\right\} =$$

$$= L\left(\{(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}\right).$$

Como o conjunto $\{(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}$ é independente e gera $U^\perp$ então é uma base de $U^\perp$ e tem-se

$$\mathbb{R}^4 = U \oplus U^\perp =$$

$$= L\left(\{(1,0,0,0),(1,0,0,1)\}\right) \oplus L\left(\{(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}\right).$$

6. Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno definido por:

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3,$$

isto é, por

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

(i) Seja $u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Tem-se

$$\|u\| = \sqrt{\langle (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3) \rangle} = \sqrt{x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2}.$$

(ii) Considere os vectores $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (-1, 1, 0)$ e $u_3 = (0, 0, 1)$. Tem-se

$$\arccos \frac{\langle u_1, u_2 \rangle}{\|u_1\| \|u_2\|} = \arccos \frac{0}{1.1} = \frac{\pi}{2},$$

$$\arccos \frac{\langle u_2, u_3 \rangle}{\|u_2\| \|u_3\|} = \arccos \frac{0}{1.1} = \frac{\pi}{2}$$

e

$$\arccos \frac{\langle u_1, u_3 \rangle}{\|u_1\| \|u_3\|} = \arccos \frac{0}{1.1} = \frac{\pi}{2}$$

(iii) Atendendo a que

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_2, u_3 \rangle = \langle u_1, u_3 \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \|u_1\| = \|u_2\| = \|u_3\| = 1$$

então o conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$.

Seja $u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Tem-se

$$\begin{aligned} u &= \langle u, u_1 \rangle u_1 + \langle u, u_2 \rangle u_2 + \langle u, u_3 \rangle u_3 = \\ &= (x_1 + x_2) u_1 + x_2u_2 + x_3u_3. \end{aligned}$$

Logo, as coordenadas de um vector $u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ em relação à base ortonormada $\{u_1, u_2, u_3\}$ são dadas por:

$$x_1 + x_2, \quad x_2 \quad \text{e} \quad x_3.$$

7. Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Seja

$$U = L\left(\{(1, 0, -1, 0), (-1, 2, 0, 1), (2, 0, 2, 1)\}\right).$$

Determinemos a dimensão de U e uma base ortonormada para U. Tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, o conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$, com $v_1 = (1, 0, -1, 0)$, $v_2 = (-1, 2, 0, 1)$ e $v_3 = (2, 0, 2, 1)$, é uma base de U e como tal $\dim U = 3$.

Sejam

$$u_1 = v_1, \quad u_2 = v_2 - \operatorname{proj}_{u_1} v_2 \quad \text{e} \quad u_3 = v_3 - \operatorname{proj}_{u_1} v_3 - \operatorname{proj}_{u_2} v_3.$$

Logo, o conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$, com $u_1 = (1, 0, -1, 0)$,

$$u_2 = (-1, 2, 0, 1) - \frac{-1}{2}(1, 0, -1, 0) = \left(-\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

e

$$\begin{aligned} u_3 &= (2, 0, 2, 1) - \frac{0}{2}(1, 0, -1, 0) - \frac{-1}{11/2}\left(-\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}, 1\right) = \\ &= (2, 0, 2, 1) + \frac{1}{11}(-1, 4, -1, 2) = \left(\frac{21}{11}, \frac{4}{11}, \frac{21}{11}, \frac{13}{11}\right) \end{aligned}$$

é uma base ortogonal de U. Uma base ortonormada para U:

$$\left\{\frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|}, \frac{u_3}{\|u_3\|}\right\} =$$

$$= \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{22}}{22}, \frac{2\sqrt{22}}{11}, -\frac{\sqrt{22}}{22}, \frac{\sqrt{22}}{11}\right), \left(\frac{21}{\sqrt{1067}}, \frac{4}{\sqrt{1067}}, \frac{21}{\sqrt{1067}}, \frac{13}{\sqrt{1067}}\right)\right\}.$$

8. (i) O conjunto $\{(0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ gera U e é linearmente independente logo é uma base de U. Atendendo ao método de ortogonalização de Gram-Schmidt, uma base ortogonal para U é: $\{u_1, u_2\}$ em que $u_1 = (0, 1, 1)$ e

$$\begin{aligned} u_2 = (0, 0, 1) - \underset{(0,1,1)}{\operatorname{Proj}}(0, 0, 1) &= (0, 0, 1) - \frac{\langle (0, 0, 1), (0, 1, 1)\rangle}{\|(0, 1, 1)\|^2}(0, 1, 1) = \\ &= (0, 0, 1) - \frac{1}{2}(0, 1, 1) = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Assim uma base ortogonal para U é: $\left\{(0, 1, 1), \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$.

Tem-se

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y - z = 0\right\} = \{(x, y, y) : x, y \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(1, 0, 0), (0, 1, 1)\}\right).$$

Atendendo a que $\langle (1, 0, 0), (0, 1, 1)\rangle = 0$, uma base ortonormada para V é:

$$\left\{\frac{(1, 0, 0)}{\|(1, 0, 0)\|}, \frac{(0, 1, 1)}{\|(0, 1, 1)\|}\right\} = \left\{(1, 0, 0), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}.$$

(ii) Como

$$U^\perp = \left(L\left(\left\{(0, 1, 1), \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}\right)\right)^\perp = L\left(\{(1, 0, 0)\}\right),$$

uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ que inclui dois vectores geradores de U é:

$$\left\{(1,0,0), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}.$$

Como

$$V^{\perp} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y - z = 0\right\}^{\perp} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z), (0,1,-1)\rangle = 0\right\}^{\perp} =$$

$$= \left(\left(L\left(\{(0,1,-1)\}\right)\right)^{\perp}\right)^{\perp} = L\left(\{(0,1,-1)\}\right),$$

e atendendo à alínea anterior, uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ que inclui dois vectores geradores de V é:

$$\left\{(1,0,0), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}.$$

(iii) O elemento de U mais próximo de $(1,1,1)$ é:

$$P_U(1,1,1) = (1,1,1) - P_{U^{\perp}}(1,1,1) =$$

$$= (1,1,1) - \langle (1,1,1), (1,0,0)\rangle (1,0,0) = (0,1,1).$$

A distância entre $(1,1,1)$ e $V^{\perp}$ é:

$$d\left((1,1,1), V^{\perp}\right) = \|P_V(1,1,1)\| \underset{(1,1,1)\in V}{=} \|(1,1,1)\| = \sqrt{3}$$

9. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e considere o produto interno usual. Sejam $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{C}(A)$ e $\mathcal{L}(A)$ respectivamente o núcleo, espaço das colunas e espaço das linhas de A.

(i) O conjunto $\{(1,0,2),(2,0,1)\}$ é uma base para $\mathcal{C}(A)$ pois gera $\mathcal{C}(A)$ e é linearmente independente.

O conjunto $\{(1,0,2),(2,0,1),(0,1,0)\}$ é uma base para $\mathbb{R}^3$. Como $(2,0,1)$ e $(0,1,0)$ são ortogonais, basta aplicar Gram-Schmidt a $(1,0,2)$:

$$(1,0,2) - P_{(2,0,1)}(1,0,2) - P_{(0,1,0)}(1,0,2) =$$

$$= (1,0,2) - \frac{\langle (1,0,2),(2,0,1)\rangle}{\|(2,0,1)\|^2}(2,0,1) - \frac{\langle (1,0,2),(0,1,0)\rangle}{\|(0,1,0)\|^2}(0,1,0) =$$

$$= (1,0,2) - \frac{4}{5}(2,0,1) = \left(-\frac{3}{5}, 0, \frac{6}{5}\right).$$

Logo, o conjunto

$$\left\{ \frac{(2,0,1)}{\|(2,0,1)\|}, \frac{(0,1,0)}{\|(0,1,0)\|}, \frac{\left(-\frac{3}{5},0,\frac{6}{5}\right)}{\left\|\left(-\frac{3}{5},0,\frac{6}{5}\right)\right\|} \right\} = \left\{ \left(\frac{2\sqrt{5}}{5},0,\frac{\sqrt{5}}{5}\right), (0,1,0), \left(-\frac{\sqrt{5}}{5},0,\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \right\}$$

é uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ que inclui dois vectores de $\mathcal{C}(A)$: $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},0,\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5},0,\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

(ii) O elemento de $\mathcal{L}(A)$ mais próximo de $(1,1,1)$ é:

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{L}(A)}(1,1,1) &= (1,1,1) - P_{\mathcal{N}(A)}(1,1,1) \underset{\mathcal{N}(A)=L(\{(0,1,0)\})}{=} \\ &= (1,1,1) - \frac{\langle (1,1,1),(0,1,0)\rangle}{\|(0,1,0)\|^2}(0,1,0) = \\ &= (1,1,1) - (0,1,0) = (1,0,1). \end{aligned}$$

A distância entre $(1,1,1)$ e $\mathcal{N}(A)$ é:

$$d\left((1,1,1),\mathcal{N}(A)\right) = \left\| P_{(\mathcal{N}(A))^\perp}(1,1,1) \right\| = \left\| P_{\mathcal{L}(A)}(1,1,1) \right\| = \|(1,0,1)\| = \sqrt{2}.$$

10. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e considere o produto interno usual. Sejam $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{C}(A)$ e $\mathcal{L}(A)$ respectivamente o núcleo, espaço das colunas e espaço das linhas de A.

(i) Tem-se $(\mathcal{N}(A))^\perp = \mathcal{L}(A)$. O conjunto $\{(1,0,1),(0,2,0)\}$ é uma base para $\mathcal{N}(A)$ pois gera $\mathcal{N}(A)$ e é linearmente independente. Como $\langle (1,0,1),(0,2,0)\rangle = 0$, os vectores $(1,0,1)$ e $(0,2,0)$ são ortogonais. Logo, o conjunto

$$\left\{ \frac{(1,0,1)}{\|(1,0,1)\|}, \frac{(0,2,0)}{\|(0,2,0)\|} \right\} = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right), (0,1,0) \right\}$$

é uma base ortonormada para $(\mathcal{N}(A))^\perp$.

(ii) O conjunto $\{(1,0,1),(0,2,0)\}$ é uma base para $\mathcal{C}(A)$ pois gera $\mathcal{C}(A)$ e é linearmente independente.

O conjunto $\{(1,0,1),(0,2,0),(0,0,1)\}$ é uma base para $\mathbb{R}^3$. Como $(1,0,1)$ e $(0,2,0)$ são ortogonais, basta aplicar Gram-Schmidt a $(0,0,1)$:

$$(0,0,1) - P_{(1,0,1)}(0,0,1) - P_{(0,2,0)}(0,0,1) =$$

$$= (0,0,1) - \frac{\langle (0,0,1),(1,0,1)\rangle}{\|(1,0,1)\|^2}(1,0,1) - \frac{\langle (0,0,1),(0,2,0)\rangle}{\|(0,2,0)\|^2}(0,2,0) =$$

$$= (0,0,1) - \frac{1}{2}(1,0,1) = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right).$$

Logo, o conjunto

$$\left\{ \frac{(1,0,1)}{\|(1,0,1)\|}, \frac{(0,2,0)}{\|(0,2,0)\|}, \frac{\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)}{\left\|\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)\right\|} \right\} = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), (0,1,0), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\}$$

é uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ que inclui dois vectores de $\mathcal{C}(A)$: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $(0,1,0)$.

(iii) O elemento de $\mathcal{L}(A)$ mais próximo de $(1,2,3)$ é:

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{L}(A)}(1,2,3) &= (1,2,3) - P_{\mathcal{N}(A)}(1,2,3) \underset{\mathcal{N}(A)=L(\{(-1,0,1)\})}{=} \\ &= (1,2,3) - \frac{\langle (1,2,3), (-1,0,1) \rangle}{\|(-1,0,1)\|^2}(-1,0,1) = \\ &= (1,2,3) - (-1,0,1) = (2,2,2). \end{aligned}$$

A distância entre $(1,2,3)$ e $\mathcal{L}(A)^{\perp}$ é:

$$d\left((1,2,3), (\mathcal{L}(A))^{\perp}\right) = \left\|P_{\mathcal{L}(A)}(1,2,3)\right\| = \|(2,2,2)\| = 2\sqrt{3}.$$

11. Seja $U = L(\{(1,1,1,0), (0,1,1,1)\})$. Seja $(x,y,z,w) \in U$. Então existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que

$$(x,y,z,w) = x(1,1,1,0) + y(0,1,1,1).$$

Deste modo, o seguinte sistema (nas variáveis x e y) tem que ser possível e determinado:

$$\begin{cases} x = x \\ x + y = y \\ x + y = z \\ y = w \end{cases}$$

Considerando então a matriz aumentada deste sistema, tem-se:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \\ 0 & 1 & w \end{array}\right] \underset{\substack{-L_1+L_2 \to L_2 \\ -L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \left[\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & 1 & z-x \\ 0 & 1 & w \end{array}\right]\right] \underset{\substack{-L_2+L_3 \to L_3 \\ -L_2+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow} \left[\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & z-y \\ 0 & 0 & x-y+w \end{array}\right]\right].$$

Logo, para que o sistema anterior seja possível e determinado, é preciso que se tenha $z - y = 0$ e $x - y + w = 0$.

Assim, $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + w = 0 \;\text{ e }\; z - y = 0\}$, isto é,

$$U = \mathcal{N}(A), \;\text{ com }\; A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

12. Seja $\mathcal{B} = \{(1,0),(1,-1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$. Vamos definir um produto interno em $\mathbb{R}^2$ em relação ao qual a base $\mathcal{B}$ é ortonormada.

Seja $\mathcal{B}_c^2 = \{(1,0),(0,1)\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^2$. A matriz de mudança de base de B_c^2 para $\mathcal{B}$ é dada por

$$S_{B_c^2 \to \mathcal{B}} = \left(S_{\mathcal{B} \to B_c^2}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sejam $u, v \in \mathbb{R}^2$. Tem-se

$$u = (x_1, x_2) \quad \text{e} \quad v = (y_1, y_2),$$

onde x_1, x_2 e y_1, y_2 são as coordenadas na base $\mathcal{B}_c^2$ de u e v respectivamente. Seja $S = S_{B_c^2 \to \mathcal{B}}$. Logo, tem-se a aplicação $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ definida por

$$\langle u, v \rangle = (Su)^T G (Sv), \quad \text{com } G = \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right) = \\ &= x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2 x_2 y_2. \end{aligned}$$

Como

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2 x_2 y_2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

e a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ é simétrica, sendo os seus valores próprios ($\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2}$ e $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$) positivos, então a expressão

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2 x_2 y_2$$

define um produto interno em $\mathbb{R}^2$. Além disso, é fácil verificar que para este produto interno a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(1,-1)\}$ é ortonormada:

$$\langle (1,0), (1,-1) \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle (1,0), (1,0) \rangle = \langle (1,-1), (1,-1) \rangle = 1.$$

13. Considere a aplicação $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 4 x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

(i) Tem-se

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Como $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é simétrica e os seus valores próprios ($\frac{5+\sqrt{13}}{2}$ e $\frac{5-\sqrt{13}}{2}$) são todos positivos, logo, a aplicação $\langle , \rangle$ define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

(ii) Seja $V = L\left(\{(3,4,0)\}\right) \subset \mathbb{R}^3$. Uma base ortonormada para V:

$$\left\{ \frac{(3,4,0)}{\|(3,4,0)\|} \right\} = \left\{ \frac{(3,4,0)}{7} \right\} = \left\{ \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, 0 \right) \right\}$$

O ponto de V mais próximo de $(0,1,0)$ é

$$P_V(0,1,0) = \left\langle (0,1,0), \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, 0 \right) \right\rangle \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, 0 \right) = \frac{13}{7} \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, 0 \right) = \left(\frac{39}{49}, \frac{52}{49}, 0 \right).$$

Nota. Em alternativa, como $\dim V = 1$,

$$P_V(0,1,0) = \operatorname{proj}_{(3,4,0)}(0,1,0) = \frac{\langle (0,1,0), (3,4,0) \rangle}{\|(3,4,0)\|^2} (3,4,0) = \frac{13}{49} (3,4,0) = \left(\frac{39}{49}, \frac{52}{49}, 0 \right).$$

(iii) Tem-se

$$\begin{aligned} V^{\perp} &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z), (3,4,0) \rangle = 0 \right\} = \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - 4x - 3y + 16y = 0 \right\} = \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -x + 13y = 0 \right\} = \\ &= \left\{ (13y, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y, z \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= L\left(\{(13,1,0), (0,0,1)\}\right). \end{aligned}$$

Como o conjunto $\{v_1, v_2\}$, com $v_1 = (13,1,0)$ e $v_2 = (0,0,1)$, é independente e gera $V^{\perp}$ então é uma base de $V^{\perp}$. Sejam

$$u_1 = v_1 \quad \text{e} \quad u_2 = v_2 - \operatorname{proj}_{u_1} v_2.$$

Logo, o conjunto $\{u_1, u_2\}$, com $u_1 = (13,1,0)$ e $u_2 = (0,0,1) - 0(13,1,0) = (0,0,1)$, é uma base ortogonal de $V^{\perp}$.

(iv) Seja

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, 0 \right), \left(\frac{13}{\sqrt{147}}, \frac{1}{\sqrt{147}}, 0 \right), (0,0,1) \right\}.$$

Como

$$\left\{ \left(\frac{13}{\sqrt{147}}, \frac{1}{\sqrt{147}}, 0 \right), (0,0,1) \right\}$$

é uma base ortonormada para $V^{\perp}$, então $\mathcal{B}$ é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$. Atendendo a que

$$\begin{aligned}
P_V\left(\frac{3}{7},\frac{4}{7},0\right) &= \left\langle\left(\frac{3}{7},\frac{4}{7},0\right),\left(\frac{3}{7},\frac{4}{7},0\right)\right\rangle\left(\frac{3}{7},\frac{4}{7},0\right)= \\
&= \left\|\left(\frac{3}{7},\frac{4}{7},0\right)\right\|^2\left(\frac{3}{7},\frac{4}{7},0\right)=\left(\frac{3}{7},\frac{4}{7},0\right)= \\
&= 1\left(\frac{3}{7},\frac{4}{7},0\right)+0\left(\frac{13}{\sqrt{147}},\frac{1}{\sqrt{147}},0\right)+0(0,0,1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_V\left(\frac{13}{\sqrt{147}},\frac{1}{\sqrt{147}},0\right) &= \left\langle\left(\frac{13}{\sqrt{147}},\frac{1}{\sqrt{147}},0\right),\left(\frac{3}{7},\frac{4}{7},0\right)\right\rangle\left(\frac{3}{7},\frac{4}{7},0\right)= \\
&= 0\left(\frac{3}{7},\frac{4}{7},0\right)=(0,0,0)= \\
&= 0\left(\frac{3}{7},\frac{4}{7},0\right)+0\left(\frac{13}{\sqrt{147}},\frac{1}{\sqrt{147}},0\right)+0(0,0,1)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
P_V(0,0,1) &= \left\langle(0,0,1),\left(\frac{3}{7},\frac{4}{7},0\right)\right\rangle\left(\frac{3}{7},\frac{4}{7},0\right)= \\
&= 0\left(\frac{3}{7},\frac{4}{7},0\right)=(0,0,0)= \\
&= 0\left(\frac{3}{7},\frac{4}{7},0\right)+0\left(\frac{13}{\sqrt{147}},\frac{1}{\sqrt{147}},0\right)+0(0,0,1),
\end{aligned}$$

a matriz que representa P_V em relação à base $\mathcal{B}$ é dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

14. Consideremos em $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual. Seja $U=L\left(\left\{(0,1,0),\left(\frac{4}{5},0,-\frac{3}{5}\right)\right\}\right)$. Tem-se

$$U^{\perp}=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4/5 & 0 & -3/5 \end{bmatrix}\right)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}\right)=L\left(\{(3,0,4)\}\right).$$

Logo,

$$P_{U^{\perp}}(1,2,3)=\frac{\langle(1,2,3),(3,0,4)\rangle}{\|(3,0,4)\|^2}(3,0,4)=\left(\frac{9}{5},0,\frac{12}{5}\right)$$

e assim

$$P_U(1,2,3)=(1,2,3)-P_{U^{\perp}}(1,2,3)=(1,2,3)-\left(\frac{9}{5},0,\frac{12}{5}\right)=\left(-\frac{4}{5},2,\frac{3}{5}\right).$$

Deste modo,

$$(1,2,3)=\left(-\frac{4}{5},2,\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{9}{5},0,\frac{12}{5}\right),$$

com $\left(-\frac{4}{5}, 2, \frac{3}{5}\right) \in U$ e $\left(\frac{9}{5}, 0, \frac{12}{5}\right) \in U^{\perp}$.

15. Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual.
(i) Seja $U = L\left(\{(1,0,0,0),(1,1,0,1)\}\right)$. Logo,

$$U^{\perp} = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \langle (x,y,z,w),(1,0,0,0)\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle (x,y,z,w),(1,1,0,1)\rangle = 0\right\}.$$

Tem-se então:

$$\begin{cases} x = 0 \\ \\ x + y + w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \\ y = -w. \end{cases}$$

Logo,

$$U^{\perp} = \left\{(0,-w,z,w) \in \mathbb{R}^4 : z, w \in \mathbb{R}\right\} = L\left(\{(0,-1,0,1),(0,0,1,0)\}\right).$$

Como

$$\langle (0,-1,0,1),(0,0,1,0)\rangle = 0$$

então o conjunto $\{(0,-1,0,1),(0,0,1,0)\}$ é uma base ortogonal de $U^{\perp}$.

(ii) Seja $U = L\left(\{(1,0,1,1)\}\right)$. Logo,

$$U^{\perp} = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \langle (x,y,z,w),(1,0,1,1)\rangle = 0\right\}.$$

Tem-se então:

$$x + z + w = 0 \Leftrightarrow x = -z - w.$$

Logo,

$$U^{\perp} = \left\{(-z-w,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : y,z,w \in \mathbb{R}\right\} = L\left(\{(0,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)\}\right),$$

pois

$$(-z-w,y,z,w) = y(0,1,0,0) + z(-1,0,1,0) + w(-1,0,0,1).$$

Como o conjunto $\{(0,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)\}$ é independente (basta colocar esses três vectores como linhas ou como colunas de uma matriz e aplicar de seguida o método de eliminação de Gauss obtendo-se uma matriz em escada de linhas) e gera $U^{\perp}$ então é uma base de $U^{\perp}$.

Como $(0,1,0,0)$ e $(-1,0,1,0)$ são ortogonais, basta aplicar Gram-Schmidt a $(-1,0,0,1)$:

$$(-1,0,0,1) - P_{(0,1,0,0)}(-1,0,0,1) - P_{(-1,0,1,0)}(-1,0,0,1) =$$

$$= (-1,0,0,1) - \frac{\langle(-1,0,0,1),(0,1,0,0)\rangle}{\|(0,1,0,0)\|^2}(0,1,0,0) - \frac{\langle(-1,0,0,1),(-1,0,1,0)\rangle}{\|(-1,0,1,0)\|^2}(-1,0,1,0) =$$

$$= (-1,0,0,1) - \frac{1}{2}(-1,0,1,0) = \left(-\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},1\right).$$

Logo, o conjunto

$$\left\{(0,1,0,0),(-1,0,1,0),\left(-\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},1\right)\right\}$$

é uma base ortogonal de $U^\perp$.

(iii) Seja $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y + z + 2w = 0\}$. Logo, atendendo a que o produto interno é o usual (de $\mathbb{R}^4$), Tem-se:

$$U = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \langle (x,y,z,w), (1,2,1,2) \rangle = 0\right\} = \left(L\left(\{(1,2,1,2)\}\right)\right)^\perp.$$

Assim,

$$U^\perp = \left(L\left(\{(1,2,1,2)\}\right)\right)^{\perp\perp} = L\left(\{(1,2,1,2)\}\right).$$

Logo, o conjunto $\{(1,2,1,2)\}$ é uma base ortogonal de $U^\perp$.

(iv) Seja $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x - z = 0 \quad \text{e} \quad 2x - y + 2z - w = 0\}$. Logo, atendendo a que o produto interno é o usual (de $\mathbb{R}^4$), Tem-se:

$$\begin{aligned} U &= \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \langle (x,y,z,w), (1,0,-1,0) \rangle = 0 \;\; \text{e} \;\; \langle (x,y,z,w), (2,-1,2,-1) \rangle = 0\right\} \\ &= \left(L\left(\{(1,0,-1,0), (2,-1,2,-1)\}\right)\right)^\perp. \end{aligned}$$

Assim,

$$U^\perp = \left(L\left(\{(1,0,-1,0), (2,-1,2,-1)\}\right)\right)^{\perp\perp} = L\left(\{(1,0,-1,0), (2,-1,2,-1)\}\right).$$

Como

$$\langle (1,0,-1,0), (2,-1,2,-1) \rangle = 0$$

então o conjunto $\{(1,0,-1,0), (2,-1,2,-1)\}$ é uma base ortogonal de $U^\perp$.

16. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Considere também o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^3$:

$$U = L\left(\{(1,1,1), (1,0,0)\}\right).$$

(i) Aplicando o método de ortogonalização de Gram-Schmidt, sejam

$$v_1 = (1,1,1) \quad \text{e} \quad v_2 = (1,0,0) - \operatorname{proj}_{(1,1,1)}(1,0,0).$$

Tem-se então:

$$\begin{aligned} v_2 &= (1,0,0) - \operatorname{proj}_{(1,1,1)}(1,0,0) \\ &= (1,0,0) - \frac{\langle (1,0,0), (1,1,1) \rangle}{\|(1,1,1)\|^2}(1,1,1) \\ &= (1,0,0) - \frac{1}{3}(1,1,1) \\ &= \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

Logo, o conjunto

$$\left\{(1,1,1), \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right\}$$

é uma base ortogonal de U.

(ii) Como o conjunto $\left\{(1,1,1),\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)\right\}$ é uma base ortogonal de U, então

$$\|(1,1,1)\|=\sqrt{3} \quad \text{e} \quad \left\|\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)\right\|=\frac{\sqrt{6}}{3},$$

então o conjunto

$$\left\{\frac{(1,1,1)}{\|(1,1,1)\|},\frac{\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)}{\left\|\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)\right\|}\right\}=\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\left(\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\right\}$$

é uma base ortonormada de U.

Por outro lado, tem-se:

$$U^{\perp}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\langle(x,y,z),(1,1,1)\rangle=0 \quad \text{e} \quad \langle(x,y,z),(1,0,0)\rangle=0\right\}=$$

$$=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}\right)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}\right).$$

Logo,

$$\begin{cases}y+z=0\\ \\ x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-z\\ \\ x=0.\end{cases}$$

Assim,

$$U^{\perp}=\left\{(0,-z,z)\in\mathbb{R}^3:z\in\mathbb{R}\right\}=L\left(\{(0,-1,1)\}\right).$$

Como

$$\|(0,-1,1)\|=\sqrt{2},$$

então o conjunto

$$\left\{\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}=\left\{\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$$

é uma base ortonormada de $U^{\perp}$.

Deste modo, uma vez que se tem

$$\mathbb{R}^3=U\oplus U^{\perp},$$

então

$$(3,2,1)=P_U(3,2,1)+P_{U^{\perp}}(3,2,1)=$$

$$=\left\langle(3,2,1),\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\rangle\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+$$

$$+\left\langle(3,2,1),\left(\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\right\rangle\left(\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)+$$

$$+\left\langle(3,2,1),\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\rangle\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$$

$$= \underbrace{\left(3, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)}_{\in U} + \underbrace{\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}_{\in U^\perp}.$$

Isto é,

$$(3,2,1) = \underbrace{\left(3, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)}_{\in U} + \underbrace{\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}_{\in U^\perp}.$$

(iii) A distância entre o ponto $(1,0,1)$ e o plano $\{(1,1,0)\}+U$ é dada por:

$$d((1,0,1), \{(1,1,0)\}+U) = \|P_{U^\perp}((1,0,1)-(1,1,0))\| = \|P_{U^\perp}(0,-1,1)\| \underset{(0,-1,1)\in_{U^\perp}}{=} \|(0,-1,1)\| = \sqrt{2}.$$

(iv) A distância entre o ponto (x,y,z) e o subespaço U é dada por:

$$\begin{aligned} d((x,y,z),U) &= \|P_{U^\perp}((x,y,z)-(0,0,0))\| = \|P_{U^\perp}(x,y,z)\| \\ &= \left\| \left\langle (x,y,z), \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\rangle \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\| \\ &= |-y+z| \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

17. Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Considere também o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^4$:

$$U = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x-y+z=0 \quad \text{e} \quad y-z+w=0\right\}.$$

(i) Tem-se então

$$U = \left\{(y-z, y, z, z-y) \in \mathbb{R}^4 : y,z \in \mathbb{R}\right\} = L(\{(1,1,0,-1),(-1,0,1,1)\}).$$

Aplicando o método de ortogonalização de Gram-Schmidt, sejam

$$v_1 = (1,1,0,-1) \quad \text{e} \quad v_2 = (-1,0,1,1) - \text{proj}_{(1,1,0,-1)}(-1,0,1,1).$$

Tem-se então:

$$\begin{aligned} v_2 &= (-1,0,1,1) - \text{proj}_{(1,1,0,-1)}(-1,0,1,1) \\ &= (-1,0,1,1) - \frac{\langle(-1,0,1,1),(1,1,0,-1)\rangle}{\|(1,1,0,-1)\|^2}(1,1,0,-1) \\ &= (-1,0,1,1) + \frac{2}{3}(1,1,0,-1) \\ &= \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

Logo, o conjunto

$$\left\{(1,1,0,-1),\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},1,\frac{1}{3}\right)\right\}$$

é uma base ortogonal de U. Como

$$\|(1,1,0,-1)\|=\sqrt{3}\ \text{ e }\ \left\|\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},1,\frac{1}{3}\right)\right\|=\frac{\sqrt{15}}{3},$$

então o conjunto

$$\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},0,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\left(-\frac{\sqrt{15}}{15},\frac{2\sqrt{15}}{15},\frac{3\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{15}\right)\right\}$$

é uma base ortonormada de U.

(ii) Como

$$U=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : x-y+z=0 \quad \text{e} \quad y-z+w=0\right\}$$

e atendendo ao produto interno usual de $\mathbb{R}^4$, Tem-se:

$$\begin{aligned} U &= \left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : \langle(x,y,z,w),(1,-1,1,0)\rangle=0 \ \text{ e } \ \langle(x,y,z,w),(0,1,-1,1)\rangle=0\right\} \\ &= \left(L\left(\{(1,-1,1,0),(0,1,-1,1)\}\right)\right)^{\perp}. \end{aligned}$$

Logo,

$$U^{\perp}=\left(L\left(\{(1,-1,1,0),(0,1,-1,1)\}\right)\right)^{\perp\perp}=L\left(\{(1,-1,1,0),(0,1,-1,1)\}\right).$$

Aplicando o método de ortogonalização de Gram-Schmidt, sejam

$$v_1=(1,-1,1,0) \quad \text{e} \quad v_2=(0,1,-1,1)-\operatorname{proj}_{(1,-1,1,0)}(0,1,-1,1).$$

Tem-se então:

$$\begin{aligned} v_2 &= (0,1,-1,1)-\operatorname{proj}_{(1,-1,1,0)}(0,1,-1,1) \\ &= (0,1,-1,1)-\frac{\langle(0,1,-1,1),(1,-1,1,0)\rangle}{\|(1,-1,1,0)\|^2}(1,-1,1,0) \\ &= (0,1,-1,1)+\frac{2}{3}(1,-1,1,0) \\ &= \left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},1\right). \end{aligned}$$

Logo, o conjunto

$$\left\{(1,-1,1,0),\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},1\right)\right\}$$

é uma base ortogonal de $U^{\perp}$. Como

$$\|(1,-1,1,0)\|=\sqrt{3}\ \text{ e }\ \left\|\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},1\right)\right\|=\frac{\sqrt{15}}{3},$$

então o conjunto

$$\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},0\right),\left(\frac{2\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{15},-\frac{\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{5}\right)\right\}$$

é uma base ortonormada de $U^{\perp}$.

(iii) A projecção ortogonal P_U de $\mathbb{R}^4$ sobre U é definida por:

$$\begin{aligned} P_U \quad &: \quad \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,w) \quad &\to \quad \left\langle (x,y,z,w),\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},0,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\rangle\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},0,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+ \\ &\quad +\left\langle (x,y,z,w),\left(-\frac{\sqrt{15}}{15},\frac{2\sqrt{15}}{15},\frac{3\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{15}\right)\right\rangle\left(-\frac{\sqrt{15}}{15},\frac{2\sqrt{15}}{15},\frac{3\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{15}\right), \end{aligned}$$

uma vez que o conjunto

$$\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},0,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\left(-\frac{\sqrt{15}}{15},\frac{2\sqrt{15}}{15},\frac{3\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{15}\right)\right\}$$

é uma base ortonormada de U. Logo, a projecção ortogonal de $(0,0,1,0)$ sobre U é dada por:

$$\begin{aligned} P_U(0,0,1,0) &= \left\langle (0,0,1,0),\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},0,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\rangle\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},0,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+ \\ &\quad +\left\langle (0,0,1,0),\left(-\frac{\sqrt{15}}{15},\frac{2\sqrt{15}}{15},\frac{3\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{15}\right)\right\rangle\left(-\frac{\sqrt{15}}{15},\frac{2\sqrt{15}}{15},\frac{3\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{15}\right) \\ &= \left(-\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{1}{5}\right). \end{aligned}$$

A projecção ortogonal $P_{U^{\perp}}$ de $\mathbb{R}^4$ sobre $U^{\perp}$ é definida por:

$$\begin{aligned} P_{U^{\perp}} \quad &: \quad \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,w) \quad &\to \quad \left\langle (x,y,z,w),\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)\right\rangle\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)+ \\ &\quad +\left\langle (x,y,z,w),\left(\frac{2\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{15},-\frac{\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{5}\right)\right\rangle\left(\frac{2\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{15},-\frac{\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{5}\right), \end{aligned}$$

uma vez que o conjunto

$$\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},0\right),\left(\frac{2\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{15},-\frac{\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{5}\right)\right\}$$

é uma base ortonormada de $U^\perp$. Logo, a projecção ortogonal de $(0,0,1,0)$ sobre $U^\perp$ é dada por:

$$\begin{aligned}
P_{U^\perp}(0,0,1,0) &= \left\langle (0,0,1,0), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)\right\rangle \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right) + \\
&\quad + \left\langle (0,0,1,0), \left(\frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}, -\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{5}\right)\right\rangle \left(\frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}, -\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{5}\right) \\
&= \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) + \left(-\frac{2}{15}, -\frac{1}{15}, \frac{1}{15}, -\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right).
\end{aligned}$$

Nota muito importante: Uma vez que se tem

$$\mathbb{R}^4 = U \oplus U^\perp,$$

então para todo o $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$,

$$(x,y,z,w) = P_U(x,y,z,w) + P_{U^\perp}(x,y,z,w).$$

Logo, uma vez calculado $P_U(0,0,1,0)$ pela definição, como se fêz atrás, obtendo-se $P_U(0,0,1,0) = \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$, então não precisamos de efectuar o cálculo de $P_{U^\perp}(0,0,1,0)$ pela definição. Basta efectuar:

$$\begin{aligned}
P_{U^\perp}(0,0,1,0) &= (0,0,1,0) - P_U(0,0,1,0) \\
&= (0,0,1,0) - \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right) \\
&= \left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right).
\end{aligned}$$

(iv) Seja $\mathcal{B}_c^4 = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^4$. Tem-se:

$$\begin{aligned}
P_U(1,0,0,0) &= \left\langle (1,0,0,0), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\rangle \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \\
&\quad \left\langle (1,0,0,0), \left(-\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{3\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}\right)\right\rangle \left(-\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{3\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}\right) \\
&= \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{15}, -\frac{2}{15}, -\frac{3}{15}, -\frac{1}{15}\right) = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_U(0,1,0,0) &= \left\langle (0,1,0,0), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\rangle \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \\
&\quad \left\langle (0,1,0,0), \left(-\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{3\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}\right)\right\rangle \left(-\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{3\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}\right) \\
&= \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{2}{15}, \frac{4}{15}, \frac{6}{15}, \frac{2}{15}\right) = \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right).
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P_U(0,0,1,0) &= \left\langle (0,0,1,0), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\rangle \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \\
&\quad \left\langle (0,0,1,0), \left(-\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{3\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}\right)\right\rangle \left(-\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{3\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}\right) \\
&= \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_U(0,0,0,1) &= \left\langle (0,0,0,1), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\rangle \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \\
&\quad \left\langle (0,0,0,1), \left(-\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{3\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}\right)\right\rangle \left(-\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{3\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}\right) \\
&= \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \frac{3}{15}, \frac{1}{15}\right) = \left(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right).
\end{aligned}
$$

Logo, a representação matricial de $P_U : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ em relação à base canónica de $\mathbb{R}^4$, é dada por:

$$
M(P_U; \mathcal{B}_c^4; \mathcal{B}_c^4) = \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 & -1/5 & -2/5 \\ 1/5 & 3/5 & 2/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 & 3/5 & 1/5 \\ -2/5 & -1/5 & 1/5 & 2/5 \end{bmatrix}.
$$

Tem-se:

$$
\begin{aligned}
P_{U^\perp}(1,0,0,0) &= \left\langle (1,0,0,0), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)\right\rangle \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right) + \\
&\quad \left\langle (1,0,0,0), \left(\frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}, -\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{5}\right)\right\rangle \left(\frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}, -\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{5}\right) \\
&= \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) + \left(\frac{4}{15}, \frac{2}{15}, -\frac{2}{15}, \frac{2}{5}\right) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{U^\perp}(0,1,0,0) &= \left\langle (0,1,0,0), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)\right\rangle \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right) + \\
&\quad \left\langle (0,1,0,0), \left(\frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}, -\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{5}\right)\right\rangle \left(\frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}, -\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{5}\right) \\
&= \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right) + \left(\frac{2}{15}, \frac{1}{15}, -\frac{1}{15}, \frac{1}{5}\right) = \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{U^\perp}(0,0,1,0) &= \left\langle (0,0,1,0), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)\right\rangle \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right) + \\
&\quad \left\langle (0,0,1,0), \left(\frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}, -\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{5}\right)\right\rangle \left(\frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}, -\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{5}\right) \\
&= \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) + \left(-\frac{2}{15}, -\frac{1}{15}, \frac{1}{15}, -\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{U^\perp}(0,0,0,1) &= \left\langle (0,0,0,1), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)\right\rangle \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right) + \\
&\quad \left\langle (0,0,0,1), \left(\frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}, -\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{5}\right)\right\rangle \left(\frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}, -\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{5}\right) \\
&= \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right).
\end{aligned}
$$

Logo, a representação matricial de $P_{U^\perp} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ em relação à base canónica de $\mathbb{R}^4$, é dada por:

$$
M(P_{U^\perp}; \mathcal{B}_c^4; \mathcal{B}_c^4) = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 & 1/5 & 2/5 \\ -1/5 & 2/5 & -2/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 2/5 & -1/5 \\ 2/5 & 1/5 & -1/5 & 3/5 \end{bmatrix}.
$$

(v) Escolhendo um ponto de U, por exemplo $(0,0,0,0)$, a distância entre $(0,0,1,0)$ e U é dada por:

$$
d((0,0,1,0),U) = \|P_{U^\perp}((0,0,1,0)-(0,0,0,0))\| = \|P_{U^\perp}(0,0,1,0)\| =
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\| \left\langle (0,0,1,0), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)\right\rangle \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right) + \right. \\
&\quad \left. + \left\langle (0,0,1,0), \left(\frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}, -\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{5}\right)\right\rangle \left(\frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}, -\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{5}\right) \right\| \\
&= \left\| \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) + \left(-\frac{2}{15}, -\frac{1}{15}, \frac{1}{15}, -\frac{1}{5}\right) \right\| = \left\| \left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right) \right\| = \frac{\sqrt{10}}{5}.
\end{aligned}
$$

(vi) A distância entre (x,y,z,w) e U é dada por:

$$
d((x,y,z,w),U) = \|P_{U^\perp}((x,y,z,w)-(0,0,0,0))\| = \|P_{U^\perp}(x,y,z,w)\| =
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\| \left\langle (x,y,z,w), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)\right\rangle \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right) + \right. \\
&\quad \left. + \left\langle (x,y,z,w), \left(\frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}, -\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{5}\right)\right\rangle \left(\frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}, -\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{5}\right) \right\| =
\end{aligned}
$$

$$= \left\| \left(x\frac{\sqrt{3}}{3} - y\frac{\sqrt{3}}{3} + z\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0 \right) + \right.$$

$$\left. + \left(x\frac{2\sqrt{15}}{15} + y\frac{\sqrt{15}}{15} - z\frac{\sqrt{15}}{15} + w\frac{\sqrt{15}}{5} \right) \left(\frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}, -\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{5} \right) \right\| =$$

$$= \left\| \left(\frac{2}{5}w + \frac{3}{5}x - \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z, \frac{1}{5}w - \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y - \frac{2}{5}z, \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}w - \frac{2}{5}y + \frac{2}{5}z, \frac{3}{5}w + \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y - \frac{1}{5}z \right) \right\| =$$

$$= \frac{1}{5}\sqrt{(2w + 3x - y + z)^2 + (w - x + 2y - 2z)^2 + (x - w - 2y + 2z)^2 + (3w + 2x + y - z)^2}.$$

18. Em P_2:

$$\langle p(t), q(t) \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

Considere também o seguinte subespaço de P_2:

$$U = \{p(t) \in P_2 : p(0) = 0\}.$$

(i) Em P_2, para $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ e $q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$ tem-se

$$\langle p(t), q(t) \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) =$$

$$= (a_0 - a_1 + a_2)(b_0 - b_1 + b_2) + a_0 b_0 + (a_0 + a_1 + a_2)(b_0 + b_1 + b_2) =$$

$$= 3a_0 b_0 + 2a_0 b_2 + 2a_1 b_1 + 2a_2 b_0 + 2a_2 b_2 =$$

$$= \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_1 \end{bmatrix}.$$

Assim, relativamente à base canónica ordenada $\{1, t, t^2\}$ de P_2:

$$\langle p(t), q(t) \rangle = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle 1, 1 \rangle & \langle 1, t \rangle & \langle 1, t^2 \rangle \\ \langle t, 1 \rangle & \langle t, t \rangle & \langle t, t^2 \rangle \\ \langle t^2, 1 \rangle & \langle t^2, t \rangle & \langle t^2, t^2 \rangle \end{bmatrix}$$

Como $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ é simétrica e os seus valores próprios ($\frac{1}{2}\sqrt{17} + \frac{5}{2}$, $\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17}$ e 2) são todos positivos, logo, a aplicação $\langle , \rangle$ define um produto interno em P_2.

(ii) Tem-se:

$$U = \left\{ a_1 t + a_2 t^2 : a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\} = L(\{t, t^2\}).$$

Aplicando o método de ortogonalização de Gram-Schmidt, sejam

$$p_1(t) = t \quad \text{e} \quad p_2(t) = t^2 - \frac{\langle t^2, t\rangle}{\|t\|^2} t.$$

Logo,

$$p_2(t) = t^2 - \frac{(-1)^2(-1) + 0^2 0 + 1^2 1}{(-1).(-1) + 0.0 + 1.1} t = t^2.$$

Logo, o conjunto $\{t, t^2\}$ é uma base ortogonal de U. Assim, o conjunto

$$\left\{ \frac{t}{\|t\|}, \frac{t^2}{\|t^2\|} \right\} = \left\{ \frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t^2}{\sqrt{2}} \right\} = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} t, \frac{\sqrt{2}}{2} t^2 \right\}$$

é uma base ortonormada de U.

(iii) Tem-se:

$$U^\perp = \left\{ p(t) \in P_2 : \langle p(t), t\rangle = 0 \ \text{ e } \ \left\langle p(t), t^2 \right\rangle = 0 \right\}.$$

Logo,

$$\begin{cases} (a_0 - a_1 + a_2)(-1)^2 + a_0 0 + a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ \\ (a_0 - a_1 + a_2)(-1) + a_0 0 + a_0 + a_1 + a_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = -a_2 \\ \\ a_1 = 0. \end{cases}$$

Logo,

$$U^\perp = \left\{ -a_2 + a_2 t^2 : a_2 \in \mathbb{R} \right\} = L(\{-1 + t^2\}).$$

Como $\|-1 + t^2\| = 1$ então $\{-1 + t^2\}$ é uma base ortonormada de $U^\perp$.

Observação. Note que $P_2 = U \oplus U^\perp$, tendo-se, neste caso, $\dim U = 2$ e $\dim U^\perp = 1$.

(iv) A projecção ortogonal P_U de P_2 sobre U é definida por:

$$\begin{array}{rcl} P_U & : & P_2 \to P_2 \\ p(t) & \to & \left\langle p(t), \frac{\sqrt{2}}{2} t \right\rangle \frac{\sqrt{2}}{2} t + \left\langle p(t), \frac{\sqrt{2}}{2} t^2 \right\rangle \frac{\sqrt{2}}{2} t^2, \end{array}$$

uma vez que o conjunto

$$\left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} t, \frac{\sqrt{2}}{2} t^2 \right\}$$

é uma base ortonormada de U. Logo, a projecção ortogonal de $1 + t$ sobre U é dada por:

$$P_U(1 + t) = \left\langle 1 + t, \frac{\sqrt{2}}{2} t \right\rangle \frac{\sqrt{2}}{2} t + \left\langle 1 + t, \frac{\sqrt{2}}{2} t^2 \right\rangle \frac{\sqrt{2}}{2} t^2 = t + t^2$$

A projecção ortogonal $P_{U^\perp}$ de $\mathbb{R}^3$ sobre $U^\perp$ é definida por:

$$\begin{array}{rcl} P_{U^\perp} & : & P_2 \to P_2 \\ p(t) & \to & \left\langle p(t), -1 + t^2 \right\rangle (-1 + t^2), \end{array}$$

uma vez que o conjunto

$$\{-1+t^2\}$$

é uma base ortonormada de $U^\perp$. Logo, a projecção ortogonal de $1+t$ sobre $U^\perp$ é dada por:

$$P_{U^\perp}(1+t) = \left\langle 1+t, -1+t^2 \right\rangle (-1+t^2) = 1-t^2$$

Nota muito importante: Uma vez que se tem

$$P_2 = U \oplus U^\perp,$$

então para todo o $p(t) \in P_2$,

$$p(t) = P_U(p(t)) + P_{U^\perp}(p(t)).$$

Logo, uma vez calculado $P_{U^\perp}(1+t)$ pela definição, como se fêz atrás, obtendo-se $P_{U^\perp}(1+t) = 1-t^2$, então não precisamos de efectuar o cálculo de $P_U(1+t)$ pela definição. Basta efectuar:

$$P_U(1+t) = 1+t-P_{U^\perp}(1+t) = t+t^2.$$

(v) Seja $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ a base canónica de P_2. Atendendo à alínea **(iii),** tem-se

$$P_U(1) = \left\langle 1, \frac{\sqrt{2}}{2}t \right\rangle \frac{\sqrt{2}}{2}t + \left\langle 1, \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 \right\rangle \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 = t^2$$

$$P_U(t) = \left\langle t, \frac{\sqrt{2}}{2}t \right\rangle \frac{\sqrt{2}}{2}t + \left\langle t, \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 \right\rangle \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 = t$$

$$P_U(t^2) = \left\langle t^2, \frac{\sqrt{2}}{2}t \right\rangle \frac{\sqrt{2}}{2}t + \left\langle t^2, \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 \right\rangle \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 = t^2$$

$$P_{U^\perp}(1) = \left\langle 1, -1+t^2 \right\rangle \left(-1+t^2\right) = 1-t^2$$

$$P_{U^\perp}(t) = \left\langle t, -1+t^2 \right\rangle \left(-1+t^2\right) = 0$$

$$P_{U^\perp}(t^2) = \left\langle t^2, -1+t^2 \right\rangle \left(-1+t^2\right) = 0$$

e assim

$$M(P_U; \mathcal{B}; \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$M(P_{U^\perp}; \mathcal{B}; \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que

$$I = P_U + P_{U^\perp}.$$

(vi) Escolhendo um ponto de U, por exemplo t, a distância entre $1+t$ e U é dada por:

$$d(1+t,U) = \|P_{U^\perp}(1+t-t)\| = \|P_{U^\perp}(1)\| = \left\|\left\langle 1,-1+t^2\right\rangle(-1+t^2)\right\| = 1.$$

(vii) Escolhendo um ponto de U, por exemplo o polinómio nulo 0, a distância entre $a_0+a_1t+a_2t^2$ e U, com $a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}$, é dada por:

$$d(a_0+a_1t+a_2t^2,U) = \left\|P_{U^\perp}(a_0+a_1t+a_2t^2)\right\| =$$

$$= \left\|\left\langle a_0+a_1t+a_2t^2,-1+t^2\right\rangle(-1+t^2)\right\| = |a_0|\left\|1-t^2\right\| = |a_0|\,.$$

19. Considere no espaço linear $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ o produto interno definido da seguinte forma:

$$\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(AB^T).$$

Considere também o subespaço U de $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ constituído por todas as matrizes simétricas reais do tipo 2×2:

$$U = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) : b=c\right\}.$$

(i) Sejam $x,y\in\mathbb{R}$ e $A,A',B\in\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$. Tem-se

$$\langle xA+yA',B\rangle = \mathrm{tr}((xA+yA')\,B^T) = \mathrm{tr}(xAB^T+yA'B^T) \underset{\text{tr é linear}}{=}$$

$$= x\mathrm{tr}(AB^T)+y\mathrm{tr}(A'B^T) = x\langle A,B\rangle + y\langle A',B\rangle$$

$$\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(AB^T) = \mathrm{tr}(\left(A^T\right)^T B^T) = \mathrm{tr}(\left(BA^T\right)^T) = \mathrm{tr}(BA^T) = \langle B,A\rangle$$

$$\langle A,A\rangle = \mathrm{tr}(AA^T) = \mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}^T\right) = a^2+b^2+c^2+d^2\geq 0$$

para todo o $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ e

$$\left\langle\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix},\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}\right\rangle = 0 \Leftrightarrow a=b=c=d=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Logo, a aplicação $\langle,\rangle$ define um produto interno em $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$.

(ii) Tem-se:

$$U = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ b & d\end{bmatrix} : a,b,d\in\mathbb{R}\right\} =$$

$$= L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}\right)$$

pois

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

O conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base de U, uma vez que gera U, e é linearmente independente pois se tivermos:

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

então

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ e como tal, o conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é linearmente independente. Vamos aplicar agora a este conjunto o método de ortogonalização de Gram-Schmidt. Sejam

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \operatorname{proj}_{A_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \operatorname{proj}_{A_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \operatorname{proj}_{A_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \operatorname{proj}_{A_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_1 \right\rangle A_1}{\|A_1\|^2} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A_1^T \right) A_1}{\|A_1\|^2} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) A_1}{\|A_1\|^2} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{0 A_1}{\|A_1\|^2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \operatorname{proj}_{A_1}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \operatorname{proj}_{A_2}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_1 \right\rangle A_1}{\|A_1\|^2} - \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 \right\rangle A_2}{\|A_2\|^2} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A_1^T\right) A_1}{\|A_1\|^2} - \frac{\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A_2^T\right) A_2}{\|A_2\|^2} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) A_1}{\|A_1\|^2} - \frac{\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) A_2}{\|A_2\|^2} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{0A_1}{\|A_1\|^2} - \frac{0A_2}{\|A_2\|^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Logo, o conjunto $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ é uma base ortogonal de U. Como:

$$\begin{aligned}
\|A_1\| &= \sqrt{\langle A_1, A_1\rangle} = \sqrt{\operatorname{tr}(A_1A_1^T)} = \sqrt{\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)} = 1, \\
\|A_2\| &= \sqrt{\langle A_2, A_2\rangle} = \sqrt{\operatorname{tr}(A_2A_2^T)} = \sqrt{\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)} = \sqrt{2}, \\
\|A_3\| &= \sqrt{\langle A_3, A_3\rangle} = \sqrt{\operatorname{tr}(A_3A_3^T)} = \sqrt{\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)} = 1,
\end{aligned}$$

então o conjunto

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

é uma base ortonormada de U.

(iii) Tem-se

$$\begin{aligned}
U^{\perp} = \Bigg\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \ \text{ e } \\
\left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \ \text{ e } \ \left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \Bigg\}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases} a = 0 \\ b + c = 0 \\ d = 0. \end{cases}$$

Ou seja,

$$U^{\perp}=\left\{\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} : b\in\mathbb{R}\right\}=L\left(\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

Como

$$\begin{aligned}
\left\|\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right\| &= \sqrt{\left\langle\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right\rangle} \\
&= \sqrt{\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{T}\right)} \\
&= \sqrt{\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)} \\
&= \sqrt{\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)}=\sqrt{2},
\end{aligned}$$

então o conjunto

$$\left\{\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

é uma base ortonormada de $U^{\perp}$.

(iv) Seja $\mathcal{B}=\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ a base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Atendendo à alínea **(iii),** tem-se

$$\begin{aligned}
P_U\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= \left\langle\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\rangle\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+ \\
&+\left\langle\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}\right\rangle\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}+ \\
&+\left\langle\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\rangle\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
P_U\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= \left\langle\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\rangle\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+ \\
&+\left\langle\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}\right\rangle\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}+ \\
&+\left\langle\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\rangle\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \\
P_U\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) &= \left\langle\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\rangle\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+
\end{aligned}$$

$$+\left\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+\left\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_U\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+\left\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+\left\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{U^\perp}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{U^\perp}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{U^\perp}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{U^\perp}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e assim

$$M(P_U;\mathcal{B};\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$M(P_{U^\perp};\mathcal{B};\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que

$$I = P_U + P_{U^\perp}.$$

(v) A projecção ortogonal da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sobre $U^\perp$ é dada por:

$$\begin{aligned}
P_{U^\perp}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) &= \operatorname{proj}_{\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}^T \right) \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Como se tem:

$$\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = U \oplus U^\perp,$$

então para todo $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = P_U\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) + P_{U^\perp}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
P_U\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - P_{U^\perp}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

(vi) A matriz simétrica mais próxima da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz

$$P_U\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

(vii) A distância entre $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e U é dada por:

$$\begin{aligned}
d\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, U\right) &= \left\| P_{U^\perp}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\right\| = \left\|\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\right\| = \\
&= \sqrt{\left\langle \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\right\rangle} = \\
&= \sqrt{\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\right)} = \\
&= \sqrt{\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

(viii) A distância entre $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e U é dada por:

$$\begin{aligned}
d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, U\right) &= \left\| P_{U^\perp}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)\right\| = \\
&= \left\| \operatorname{proj}_{\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right\| = \\
&= \left\| \left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}\right\rangle \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}\right\| = \\
&= \left| \left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}\right\rangle \right| = \\
&= \left| \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}\right)\right| = \\
&= \left| \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}b & -\frac{1}{2}\sqrt{2}a \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}d & -\frac{1}{2}\sqrt{2}c \end{bmatrix}\right)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}\left|b-c\right|.
\end{aligned}$$

20. a) Sejam $u_1 = (1,0,-1)$ e

$$\begin{aligned}
u_2 &= (0,-1,1) - \operatorname{proj}_{(1,0,-1)}(0,-1,1) = \\
&= (0,-1,1) - \frac{\langle (0,-1,1), (1,0,-1)\rangle}{\|(1,0,-1)\|^2}(1,0,-1) = \\
&= (0,-1,1) - \frac{-1}{2}(1,0,-1) = (1/2,-1,1/2).
\end{aligned}$$

Logo, o conjunto $\{u_1, u_2\}$ é uma base ortogonal para U.

b) O conjunto

$$\left\{\frac{1}{\|u_1\|}u_1, \frac{1}{\|u_2\|}u_2\right\} = \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)\right\}$$

é uma base ortonormada para U.

Uma vez que

$$\begin{aligned} U^\perp &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z),(1,0,-1)\rangle = 0 \ \text{ e } \ \langle (x,y,z),(0,-1,1)\rangle = 0\right\} = \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z \ \text{ e } \ y = z\right\} = L\left(\{(1,1,1)\}\right), \end{aligned}$$

o conjunto $\left\{\frac{1}{\|(1,1,1)\|}(1,1,1)\right\} = \left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\}$ é uma base ortonormada para $U^\perp$.

Logo, o conjunto

$$\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\}$$

é uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ que inclui dois vectores geradores de U.

c) Tem-se

$$P_{U^\perp}(1,0,0) = \left\langle (1,0,0), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\rangle \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

d) Tem-se

$$\begin{aligned} d\left((1,0,0), U^\perp\right) &= \|P_U(1,0,0)\| = \|(1,0,0) - P_{U^\perp}(1,0,0)\| = \\ &= \left\|(1,0,0) - \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\| = \left\|\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right\| = \frac{\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$

21. a) Sejam $p(t), q(t) \in P_2$, isto é, $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ e $q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$, com $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Tem-se

$$\left\langle a_0 + a_1 t + a_2 t^2, b_0 + b_1 t + b_2 t^2\right\rangle = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Assim, a aplicação $\langle , \rangle$ é desde logo bilinear. Além disso, atendendo a que a matriz $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ é simétrica e todos os seus valores próprios (1 e 2) são positivos, conclui-se que a aplicação $\langle , \rangle$ define em P_2 um produto interno.

b) Tem-se

$$\begin{aligned} W &= \left\{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in P_2 : p(0) = p(1) \text{ e } p(1) = p(-1)\right\} = \\ &= \left\{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in P_2 : a_1 = -a_2 \text{ e } a_1 = 0\right\} = \\ &= \{p(t) = a_0 : a_0 \in \mathbb{R}\} = L\left(\{1\}\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} W^\perp &= \left\{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in P_2 : \left\langle a_0 + a_1 t + a_2 t^2, 1\right\rangle = 0\right\} = \\ &= \left\{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in P_2 : a_0 = 0\right\} = L\left(\left\{t, t^2\right\}\right). \end{aligned}$$

Assim, o conjunto $\left\{\frac{1}{\|t\|}t, \frac{1}{\|t^2\|}t^2\right\} = \left\{t, \frac{\sqrt{2}}{2}t^2\right\}$ é uma base ortonormada para $W^\perp$.

22. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) O conjunto $\{(1,0,1),(1,1,0)\}$ é uma base para $\mathcal{L}(A)$ pois gera $\mathcal{L}(A)$ e é linearmente independente.

Aplicando Gram-Schmidt, o conjunto $\left\{(1,0,1),(1,1,0) - \text{proj}_{\,(1,0,1)}(1,1,0)\right\} =$

$$= \left\{(1,0,1),(1,1,0) - \frac{\langle(1,1,0),(1,0,1)\rangle}{\|(1,0,1)\|^2}(1,0,1)\right\} = \left\{(1,0,1),\left(\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

é uma base ortogonal para $\mathcal{L}(A)$.

b) Uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ que inclui dois vectores de $\mathcal{C}(A)$:

$$\left\{(1,0,0),\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}.$$

Note que $(1,0,0), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \in \mathcal{C}(A)$.

c) O elemento de $(\mathcal{N}(A))^\perp = \mathcal{L}(A)$ mais próximo de $(-1,1,-1)$ é:

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{L}(A)}(-1,1,-1) &= (-1,1,-1) - P_{\mathcal{N}(A)}(-1,1,-1) \underset{\mathcal{N}(A)=L(\{(1,-1,-1)\})}{=} \\ &= (-1,1,-1) - \frac{\langle(-1,1,-1),(1,-1,-1)\rangle}{\|(1,-1,-1)\|^2}(1,-1,-1) = \\ &= (-1,1,-1) + \frac{1}{3}(1,-1,-1) = \left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{4}{3}\right) \end{aligned}$$

e a distância entre $(-1,1,-1)$ e $(\mathcal{L}(A))^{\perp}$ é:

$$d\left((-1,1,-1),(\mathcal{L}(A))^{\perp}\right)=\left\|P_{\mathcal{L}(A)}(-1,1,-1)\right\|=\left\|\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{4}{3}\right)\right\|=\frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

23. a) Aplicando o método de ortogonalização de Gram-Schmidt, sejam

$$v_1=(1,0,-1)\quad \text{e}\quad v_2=(0,1,2)-\operatorname{proj}_{(1,0,-1)}(0,1,2).$$

Tem-se então:

$$v_2=(0,1,2)-\frac{\langle(0,1,2),(1,0,-1)\rangle}{\|(1,0,-1)\|^2}(1,0,-1)=(0,1,2)-\frac{-2}{2}(1,0,-1)=(1,1,1).$$

Logo, o conjunto

$$\{(1,0,-1),(1,1,1)\}$$

é uma base ortogonal de U.

b) Tem-se

$$\begin{aligned}U^{\perp}&=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\langle(x,y,z),(1,0,-1)\rangle=0\ \text{ e }\ \langle(x,y,z),(1,1,1)\rangle=0\right\}=\\&=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&1&1\end{bmatrix}\right)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&2\end{bmatrix}\right)=L\left(\{(1,-2,1)\}\right),\end{aligned}$$

sendo $\{(1,-2,1)\}$ uma base ortogonal de $U^{\perp}$. Deste modo, uma vez que se tem

$$\mathbb{R}^3=U\oplus U^{\perp},$$

e sendo $\{(1,0,-1),(1,1,1)\}$ uma base ortogonal de U, então

$$(2,-3,4)=P_U(2,-3,4)+P_{U^{\perp}}(2,-3,4)=$$

$$=\frac{\langle(2,-3,4),(1,0,-1)\rangle}{\|(1,0,-1)\|^2}(1,0,-1)+\frac{\langle(2,-3,4),(1,1,1)\rangle}{\|(1,1,1)\|^2}(1,1,1)+\frac{\langle(2,-3,4),(1,-2,1)\rangle}{\|(1,-2,1)\|^2}(1,-2,1)=$$

$$=-(1,0,-1)+(1,1,1)+2(1,-2,1)=$$

$$=\underbrace{(0,1,2)}_{\in U}+\underbrace{(2,-4,2)}_{\in U^{\perp}}.$$

Isto é,

$$(2,-3,4)=\underbrace{(0,1,2)}_{\in U}+\underbrace{(2,-4,2)}_{\in U^{\perp}}.$$

c) A distância entre o ponto $(2,3,7)$ e o plano $\{(1,2,3)\}+U$ é dada por:

$$d((2,3,7),\{(1,2,3)\}+U)=\|P_{U^{\perp}}((2,3,7)-(1,2,3))\|=\|P_{U^{\perp}}(1,1,4)\|=$$

$$= \left\| \frac{\langle (1,1,4),(1,-2,1)\rangle}{\|(1,-2,1)\|^2}(1,-2,1) \right\| = \frac{1}{2}\|(1,-2,1)\| = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

24. a)

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 1\right] = (1-\lambda)\,\lambda\,(2-\lambda).$$

Logo, os valores próprios de A são 1, 0 e 2. Como 0 é valor próprio de A então A não é invertível.

b) Como A tem 3 valores próprios distintos, qualquer conjunto de 3 vectores próprios associados respectivamente a cada um desses valores próprios, será linearmente independente, pelo que existirá uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A. Uma tal base poderá ser $\{(0,1,0),(-1,0,1),(1,2,1)\}$ uma vez que os subespaços próprios associados aos valores próprios 1, 0 e 2 são respectivamente dados por:

$$\mathcal{N}(A-I) = L(\{(0,1,0)\}),\ \mathcal{N}(A) = L(\{(-1,0,1)\}),\ \mathcal{N}(A-2I) = L(\{(1,2,1)\}).$$

c)

$$(1,0,1) = (1,1,1) - (0,1,0)$$

então

$$(1,0,1),(0,1,0) \in \mathcal{C}(A).$$

Além disso $\langle (1,0,1),(0,1,0)\rangle = 0$. Por outro lado, como

$$(\mathcal{C}(A))^{\perp} = \left(\mathcal{L}\left(A^T\right)\right)^{\perp} = \mathcal{N}\left(A^T\right) = L(\{(-1,0,1)\})$$

e

$$\mathbb{R}^3 = \mathcal{C}(A) \oplus (\mathcal{C}(A))^{\perp}$$

uma base ortogonal para $\mathbb{R}^3$ que inclua um vector de $(\mathcal{C}(A))^{\perp}$ poderá ser: $\{(1,0,1),(0,1,0),(-1,0,1)\}$.

d) A distância d entre $(1,1,0)$ e $\mathcal{L}(A)$ é dada por:

$$d((1,1,0),\mathcal{L}(A)) = \left\| P_{(\mathcal{L}(A))^{\perp}}(1,1,0) \right\| = \left\| P_{\mathcal{N}(A)}(1,1,0) \right\| =$$

$$= \left\| \operatorname{proj}_{(-1,0,1)}(1,1,0) \right\| = \left\| \frac{\langle (1,1,0),(-1,0,1)\rangle}{\|(-1,0,1)\|^2}(-1,0,1) \right\| = \left\| \left(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right) \right\| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

e) Como

$$(\mathcal{N}(A))^{\perp} = \mathcal{N}(B) \Leftrightarrow \mathcal{N}(A) = (\mathcal{N}(B))^{\perp} = \mathcal{L}(B)$$

e

$$\mathcal{N}(A) = L(\{(-1,0,1)\})$$

logo poderá ter-se $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

25. a) Os vectores $u_1 = (1,1,0,0), u_2 = (1,0,1,-1)$ formam uma base de V. Seja $\{v_1, v_2\}$ a base ortogonal de V que se obtém aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt aos vectores u_1 e u_2. Portanto, $v_1 = u_1 = (1,1,0,0)$ e

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 = (1,0,1,-1) - \frac{1}{2}(1,1,0,0) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -1).$$

Assim,

$$u = P_V(1,1,1,1) = \frac{\langle (1,1,1,1), v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 + \frac{\langle (1,1,1,1), v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2 =$$

$$= \frac{2}{2}(1,1,0,0) + \frac{0}{5/2}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -1) = (1,1,0,0)$$

e

$$v = P_{V^\perp}(1,1,1,1) = (1,1,1,1) - P_V(1,1,1,1) = (0,0,1,1).$$

Finalmente

$$d((1,1,1,1), V) = ||P_{V^\perp}(1,1,1,1)|| = ||(0,0,1,1)|| = \sqrt{2}.$$

b) Como

$$x = y - 2z - 3w$$

e

$$(y - 2z - 3w, y, z, w) = y(1,1,0,0) + z(-2,0,1,0) + w(-3,0,0,1)$$

concluí-se que

$$W = L((1,1,0,0), (-2,0,1,0), (-3,0,0,1)).$$

Portanto,

$$W^\perp = \mathcal{N}(A)$$

com $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

c)

$$(1,1,0,0), (1,0,1,-1) \in W,$$

pelo que qualquer combinação linear entre eles também pertence a W (porque W é um espaço linear). Portanto $V \subset W$. Assim, $W^\perp \subset V^\perp$, donde

$$W^\perp \cap V^\perp = W^\perp.$$

Mais, $\{(1,-1,2,3)\}$ é uma base de $W^{\perp}$ pois

$$W^{\perp}=\mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\right).$$

d) Não, pois pela alínea c) podemos concluir que $W^{\perp}\subset V^{\perp}$ e portanto

$$W^{\perp}+V^{\perp}=V^{\perp}\neq\mathbb{R}^4.$$

26. a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & \alpha \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1+\alpha \\ -4 \end{bmatrix}=(-1)\begin{bmatrix} 4 \\ 1+\alpha \\ -4 \end{bmatrix},$$

logo $(4,1+\alpha,-4)$ é um vector próprio de A associado ao valor próprio -1.

b)

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ -1 & 3-\lambda & \alpha \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(3-\lambda)\left((1-\lambda)^2-4\right)=(3-\lambda)^2(-1-\lambda),$$

logo, os valores próprios de A são: 3 e -1 onde $m_a(3)=2$ e $m_a(-1)=1$ são as respectivas multiplicidades algébricas.

c) Espaços próprios de A: $\mathcal{N}(A-(-1)I)$ e $\mathcal{N}(A-3I)$. Tem-se

$$\mathcal{N}(A-(-1)I)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & \alpha \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right)=L(\{(4,1+\alpha,-4)\}).$$

O conjunto $\{(4,1+\alpha,-4)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(A-(-1)I)$ pois gera $\mathcal{N}(A-(-1)I)$ e é linearmente independente.

$$\mathcal{N}(A-3I)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & \alpha \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}\right)=\begin{cases} L(\{(0,1,0)\}) & \text{se} \quad \alpha\neq 1 \\ \\ L(\{(0,1,0),(1,0,1)\}) & \text{se} \quad \alpha=1. \end{cases}$$

O conjunto $\{(0,1,0)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(A-3I)$ se $\alpha\neq 1$. O conjunto $\{(0,1,0),(1,0,1)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(A-3I)$ se $\alpha=1$.

A é diagonalizável se e só se existir uma base de $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A ($\{(4,2,-4),(0,1,0),(1,0,1)\}$) se e só se $\alpha=1$.

d) Não há nenhum valor de α para o qual exista uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ constituída só por vectores próprios de A, uma vez que A não é simétrica, isto é, $A\neq A^T$ para todo o α.

e) Para $\alpha = -1$, a distância entre o ponto $(1,1,1)$ e o subespaço $\mathcal{N}(A+I)$ é dada por:

$$\begin{aligned} d((1,1,1),\mathcal{N}(A+I)) &= \left\| P_{(\mathcal{N}(A+I))^{\perp}}(1,1,1) \right\| = \left\| P_{\mathcal{L}(A+I)}(1,1,1) \right\| = \\ &\underset{(1,1,1)\in\mathcal{L}(A+I)=L(\{(1,0,1),(0,1,0)\})}{=} \|(1,1,1)\| = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

27.

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x - 2y - 3z = 0\}.$$

a) Como $W = L\left(\{(2,1,0),(3,0,1)\}\right)$, então

$$(x-1,y-1,z-1) \in W^{\perp} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\langle (x-1,y-1,z-1),(2,1,0)\rangle = 0 \;\text{ e }\; \langle (x-1,y-1,z-1),(3,0,1)\rangle = 0)$$

$$\Leftrightarrow (2\,(x-1) + (y-1) = 0 \;\text{ e }\; 3\,(x-1) + (z-1) = 0) \Leftrightarrow (2x + y = 3 \;\text{ e }\; 3x + z = 4)$$

pelo que, as equações cartesianas da recta perpendicular ao plano W que passa pelo ponto $u = (1,1,1)$ são:

$$2x + y = 3 \;\text{ e }\; 3x + z = 4.$$

b)

$$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z),(1,-2,-3)\rangle = 0\right\}.$$

Logo, a equação cartesiana do plano paralelo ao plano W que passa pelo ponto $u = (1,1,1)$ é:

$$\langle (x-1,y-1,z-1),(1,-2,-3)\rangle = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 3z = -4.$$

28. Considere a recta

$$r = (1,1,1) + L\left(\{(1,-1,1)\}\right).$$

a) Seja $W = L\left(\{(1,-1,1)\}\right)$. Então

$$W = \left(W^{\perp}\right)^{\perp} = \left(\mathcal{N}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\right)^{\perp} = \left(L\left(\{(1,1,0),(-1,0,1)\}\right)\right)^{\perp}.$$

Logo,

$$(x-1,y-1,z-1) \in W^{\perp} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\langle (x-1,y-1,z-1),(1,1,0)\rangle = 0 \;\text{ e }\; \langle (x-1,y-1,z-1),(-1,0,1)\rangle = 0)$$

$$\Leftrightarrow (x + y = 2 \;\text{ e }\; 3x + z = 4)$$

pelo que, as equações cartesianas da recta r são:

$$x + y = 2 \;\text{ e }\; -x + z = 0.$$

b) Como
$$W^{\perp} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z),(1,-1,1)\rangle = 0\right\},$$
então a equação cartesiana do plano perpendicular à recta r que passa pelo ponto $u = (1,0,0)$ é:
$$\langle (x-1,y-0,z-0),(1,-1,1)\rangle = 0 \Leftrightarrow x - y + z = 1.$$

29. Seja $\mathcal{P}$ o plano (em $\mathbb{R}^3$) que passa pelos pontos: $(1,1,1)$, $(2,0,3)$ e $(0,2,2)$. Tem-se
$$\mathcal{P} = \{(1,1,1)\} + L\left(\{(1,-1,2),(-1,1,1)\}\right)$$
uma vez que
$$(1,-1,2) = (2,0,3) - (1,1,1) \qquad \text{e} \qquad (-1,1,1) = (0,2,2) - (1,1,1).$$

a) Seja
$$U = L\left(\{(1,-1,2),(-1,1,1)\}\right).$$
Logo,
$$U = \left(U^{\perp}\right)^{\perp} = \left(\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right)\right)^{\perp} = \left(\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\right)^{\perp}$$
$$= \left(L\left(\{(1,1,0)\}\right)\right)^{\perp} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z),(1,1,0)\rangle = 0\right\}$$
e assim, **a equação cartesiana** do plano $\mathcal{P}$ que passa pelo ponto $(1,1,1)$ é dada por:
$$\left(\langle (x-1,y-1,z-1),(1,1,0)\rangle = 0\right) \Leftrightarrow \left(1\,(x-1) + 1\,(y-1) + 0\,(z-1) = 0\right),$$
ou seja por
$$x + y = 2.$$

b) Equações paramétricas de $\mathcal{P}$:
$$\begin{cases} x = 1 + \alpha - \beta \\ y = 1 - \alpha + \beta \\ z = 1 + 2\alpha + \beta \end{cases}$$
com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

c) Equação vectorial de $\mathcal{P}$:
$$(x,y,z) = (1,1,1) + \alpha(1,-1,2) + \beta(-1,1,1), com \alpha,\beta \in \mathbb{R}.$$