Instituto Superior Técnico - Álgebra Linear - 1^o Semestre 2011/2012

LEAN - LEMat - MEAmbi - MEBiol - MEQ

Resolução da 1^a Ficha de exercícios facultativos

1. **(i)** Sejam $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times p}$ e $C = (c_{ij})_{p\times q}$.

$$(AB)\,C = \left(\sum_{l=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}\right)c_{lj}\right) = \left(\sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}\ c_{lj}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} a_{ik}b_{kl}\ c_{lj}\right) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\sum_{l=1}^{p} b_{kl}\ c_{lj}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{p} b_{kl}\ c_{lj}\right)\right) = A\,(BC)$$

(ii) Sejam $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times p}$ e $C = (c_{ij})_{n\times p}$.

$$A\,(B + C) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,(b_{kj} + c_{kj})\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj}\right) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}\right) = AB + AC$$

(iii) Sejam $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times p}$.

$$(AB)^T = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)^T = \left(\sum_{k=1}^{n} b_{kj}a_{ik}\right)^T = \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{jk}\right) = B^T A^T.$$

2. Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^TA = \mathbf{0}$. Então $\left(A^TA\right)_{(i,i)} = 0$, para todo o $i = 1, ..., n$. Como

$$\left(A^TA\right)_{(i,i)} = \left(\sum_{k=1}^{n} (a_{ik})^2\right)$$

tem-se $a_{i1} = ... = a_{in} = 0$, para todo o $i = 1, ..., n$. Logo $A = \mathbf{0}$.

3. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, tem-se

$$(A - 5I)\,u = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} u = \mathbf{0} \Leftrightarrow u \in \{(s, 2s) : s \in \mathbb{R}\}.$$

Logo

$$\{u \neq \mathbf{0} : Au = 5u\} = \{(s, 2s) : s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\}.$$

4. Para todo o $n \in \mathbf{N}$, (prova-se por indução)

(i) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{cases} (-1)^{k+1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, & \text{se } n = 2k-1, \;\; k = 1,2,3... \\ \\ (-1)^k I, \quad \text{se } n = 2k, \;\; k = 1,2,3.... \end{cases}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{bmatrix}.$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n & 1 + \cdots + n-1 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

Note que

$$\begin{aligned} & 1 + \cdots + (n-1) + (n-1) + \cdots + 1 = \\ = \; & \underbrace{1 + (n-1) + \cdots + (n-1) + 1}_{n-1 \text{ parcelas}} = \underbrace{n + \cdots + n}_{n-1 \text{ parcelas}} \\ = \; & (n-1)\, n \Leftrightarrow 1 + \cdots + (n-1) = \frac{n\,(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

(iv) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, para todo o natural $n \geq 4$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(v) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos(n\theta) & -\operatorname{sen}(n\theta) \\ \operatorname{sen}(n\theta) & \cos(n\theta) \end{bmatrix}$, (com $\theta \in \mathbb{R}$).

5.

$$A^2 = (AB)\,(AB) = A\,(BA)\,B = ABB = AB = A.$$

$$B^2 = (BA)\,(BA) = B\,(AB)\,A = BAA = BA = B.$$

6. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ uma matriz 2×2 ortogonal, isto é, tal que $AA^T = A^T A = I$. Tem-se

$$AA^T = I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T = I \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ ac+bd=0 \\ c^2+d^2=1 \end{cases}$$

e

$$A^TA = I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = I \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+c^2=1 \\ ab+cd=0 \\ b^2+d^2=1. \end{cases}$$

Logo $c = \pm b$.
Se $c = b$ tem-se $b\,(a+d) = 0 \Leftrightarrow (b = 0$ ou $a = -d)$.
Se $c = -b$ tem-se $b\,(a-d) = 0 \Leftrightarrow (b = 0$ ou $a = d)$.
Deste modo

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, $a^2+b^2 = 1 \Leftrightarrow (a = \cos\theta$ e $b = \operatorname{sen}\theta$, para algum $\theta \in \mathbb{R})$. Logo

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}, \quad (\theta \in \mathbb{R}).$$

7. (i) A e B do tipo $n \times n$, $(A+B)(A-B) = A^2 + BA - AB - B^2$.

(ii) A do tipo $m \times n$ e B do tipo $n \times m$, $(AB)^2 = ABAB$.

(iii) A e B do tipo $n \times n$, $(A+B)^2 = A^2 + BA + AB + B^2$.

8. (i) Falsa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad \text{mas } A \neq \mathbf{0} \quad \text{e} \quad B \neq \mathbf{0}.$$

No caso de A ser invertível, a seguinte condição é verdadeira:

$$AB = \mathbf{0} \Rightarrow (A = \mathbf{0} \;\text{ ou }\; B = \mathbf{0})$$

uma vez que $AB = \mathbf{0} \underset{A \text{ é invertível}}{\Leftrightarrow} B = \mathbf{0}$.

(ii) Falsa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{mas} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

No caso de A ser invertível, a seguinte condição é verdadeira:

$$AB = AC \Rightarrow B = C$$

uma vez que

$$AB = AC \underset{A \text{ é invertível}}{\Leftrightarrow} A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(A^{-1}A\right)B = \left(A^{-1}A\right)C \Leftrightarrow IB = IC \Leftrightarrow B = C.$$

9. (i) B^TAB é simétrica:

$$(B^TAB)^T = B^TA^T(B^T)^T = B^TAB,$$

pois $A = A^T$ (A é simétrica) e $(B^T)^T = B$.

(ii) Se A é normal (isto é $A^HA = AA^H$) e B é unitária (isto é $B^HB = BB^H = I$) então

$$\left(BAB^H\right)\left(BAB^H\right)^H = BAB^H\left(B^H\right)^H A^HB^H = BA\left(B^HB\right)A^HB^H =$$
$$= BAA^HB^H = BA^HAB^H = BA^HB^HBAB^H = \left(BAB^H\right)^H\left(BAB^H\right)$$

ou seja, BAB^H é normal.

(iii) Como

$$\left(B^TB\right)^T = B^T\left(B^T\right)^T = B^TB \quad \text{e} \quad \left(BB^T\right)^T = \left(B^T\right)^T B^T = BB^T$$

as matrizes B^TB e BB^T são simétricas.

Além disso, como

$$\left(B^HB\right)^H = B^H\left(B^H\right)^H = B^HB \quad \text{e} \quad \left(BB^H\right)^H = \left(B^H\right)^H B^H = BB^H$$

B^HB e BB^H são matrizes hermitianas.

10. (i) Seja $A = (a_{ij})$ do tipo $n \times n$ tal que $A^T = -A$. Assim, em relação às respectivas diagonais principais tem-se:

$$a_{ii} = -a_{ii}$$

e logo $a_{ii} = 0$, para todo o $i \in \mathbf{N}$.

(ii) Seja $A = (a_{ij})$ do tipo $n \times n$. A matriz $A - A^T$ é anti-simétrica pois:

$$(A - A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T).$$

(iii) Escrevendo $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$, a matriz A pode ser decomposta pela soma de uma matriz simétrica com uma anti-simétrica. Esta decomposição é única: Sejam A_1 simétrica e A_2 anti-simétrica tais que $A = A_1 + A_2$. Logo,

$$A^T = (A_1 + A_2)^T = A_1 - A_2.$$

Pelo que $A + A^T = 2A_1$ e $A - A^T = 2A_2$. Assim,

$$A_1 = \frac{1}{2}(A + A^T) \ \text{ e } \ A_2 = \frac{1}{2}(A - A^T).$$

11. Seja $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ uma matriz do tipo 2×2 tal que $X^2 = I$.

$$X^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$X^2 = I \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ ab + bd = 0 \\ ac + cd = 0 \\ bc + d^2 = 1. \end{cases}$$

Se $b = 0$, então $a = \pm 1$ e $d = \pm 1$ e ($c = 0$ ou $a = -d$). Logo,

$$X = I \ \text{ ou } \ X = -I \ \text{ ou } \ X = \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{bmatrix}.$$

Se $c = 0$ então $a = \pm 1$ e $d = \pm 1$ e ($b = 0$ ou $a = -d$). Logo,

$$X = I \ \text{ ou } \ X = -I \ \text{ ou } \ X = \pm \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Se $b \neq 0$ e $c \neq 0$ então $a = -d$ e $c = \frac{1-a^2}{b}$. Logo,

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{bmatrix}.$$

Logo, todas as matrizes X que satisfazem $X^2 = I$ são:

$$\pm I, \quad \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{bmatrix}, \quad \pm \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{bmatrix}.$$

Observe assim que a equação matricial $X^2 = I$ tem um número infinito de soluções em contraste com a equação escalar $x^2 = 1$ que tem apenas duas soluções (1 e -1).

12. Seja $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$ tal que

$$XA = AX,$$

para todo o $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Tem-se então:

$$XA = AX \Leftrightarrow \begin{cases} x_{11}a + x_{12}c = ax_{11} + bx_{21} \\ \\ x_{21}a + x_{22}c = cx_{11} + dx_{21} \\ \\ x_{11}b + x_{12}d = ax_{12} + bx_{22} \\ \\ x_{21}b + x_{22}d = cx_{12} + dx_{22}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{12}c = bx_{21} \\ \\ x_{21}(a-d) = c(x_{22} - x_{11}) \\ \\ (x_{11} - x_{22})b = (d-a)x_{12}. \end{cases}$$

Se $a = 1$ e $b = c = d = 0$, então $x_{21} = x_{12} = 0$.
Se $b = 1$ e $a = c = d = 0$, então $x_{21} = 0$ e $x_{11} = x_{22}$.
Se $c = 1$ e $a = b = d = 0$, então $x_{12} = 0$ e $x_{11} = x_{22}$.
Se $d = 1$ e $a = b = c = 0$, então $x_{21} = x_{12} = 0$.
Logo, a matriz X tal que $XA = AX$, para todo o $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, é dada por:

$$X = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

13. Sendo A uma matriz do tipo $m \times n$, seja $\mathcal{N}(A) = \{X : AX = \mathbf{0}\}$.

(i) Sendo A e B matrizes de tipos apropriados, seja $u \in \mathcal{N}(B)$. Logo $Bu = \mathbf{0}$, pelo que

$$(AB)\,u = A\,(Bu) = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

e assim $u \in \mathcal{N}(AB)$. Deste modo, tem-se

$$\mathcal{N}(B) \subset \mathcal{N}(AB)\,.$$

(ii) Atendendo à alínea anterior $\mathcal{N}(A) \subset \mathcal{N}\left(A^T A\right)$.

Vejamos que $\mathcal{N}\left(A^T A\right) \subset \mathcal{N}(A)$. Seja $u \in \mathcal{N}\left(A^T A\right)$ e $Au = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Logo

$$A^T A u = \left(A^T A\right) u = \mathbf{0}$$

e assim

$$u^T A^T A u = \mathbf{0} \Leftrightarrow (Au)^T (Au) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} (v_i)^2 = \mathbf{0} \Leftrightarrow Au = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

pelo que $u \in \mathcal{N}(A)$.

Logo

$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}\left(A^T A\right).$$

(iii) Sejam A e B matrizes do tipo $m \times n$ com $m < n$ tais que AB^T é invertível. Como

$$\{\mathbf{0}\} \underset{m<n}{\neq} \mathcal{N}(A) \subset \mathcal{N}\left(B^T A\right)$$

então $B^T A$ não é invertível.

Se alguma linha de B pertencesse a $\mathcal{N}(A)$ isso seria equivalente a alguma coluna de B^T pertencer a $\mathcal{N}(A)$, ou seja, à matriz AB^T ter alguma coluna nula, o que contradiria o facto de AB^T ser invertível.

(iv) Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que para todo o $B \in \mathbb{R}^m$ o sistema $AX = B$ é possível, então car $A = m$. Assim AA^T (do tipo $m \times m$) é invertível e por **(ii)**

$$\mathcal{N}\left(A^T\right) = \mathcal{N}\left(AA^T\right) = \{\mathbf{0}\}.$$

14. Seja $A = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $Au = \mathbf{0}$ para qualquer $u \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

Para cada $j \in \{1, ..., n\}$ fixo, seja $e_j = (\delta_{ij})_{n\times 1} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ em que $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } \; i = j \\ 0 & \text{se } \; i \neq j. \end{cases}$
Como

$$Ae_j = \mathbf{0}$$

para todo o $j \in \{1, ..., n\}$ e por outro lado

$$Ae_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

para todo o $j \in \{1, ..., n\}$, então $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ para todo o $j \in \{1, ..., n\}$ pelo que $A = \mathbf{0}$.

15. Sendo $A, B \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

e assim

$$AB^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix}.$$

Como A e B são matrizes não nulas, existe $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $a_i \neq 0$ e existe $j \in \{1, ..., n\}$ tal que $b_j \neq 0$, tendo-se

$$AB^T = \begin{bmatrix} a_1b_1 & \cdots & a_1b_j & \cdots & a_1b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_ib_1 & \cdots & a_ib_j & \cdots & a_ib_n \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & \cdots & a_nb_j & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix}.$$

Aplicando sucessivamente a operação elementar

$$-\frac{a_k}{a_i}L_i + L_k \to L_k$$

para todo o $k = 1, ..., n$ com $k \neq i$, tem-se

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ a_ib_1 & \cdots & a_ib_j & \cdots & a_ib_n \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \underset{L_i \leftrightarrow L_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} a_ib_1 & \cdots & a_ib_j & \cdots & a_ib_n \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

com $a_ib_j \neq 0$, isto é,

$$\text{car}(AB^T) = 1.$$

16. Seja A uma matriz do tipo $m \times n$ tal que $\text{car}\, A = m$. Então existe uma matriz invertível R, $m \times m$, produto de matrizes elementares (por aplicação do método de eliminação de Gauss) tal que

$$RA = \begin{bmatrix} I & B \end{bmatrix}$$

onde I é a matriz identidade $r \times r$ e B é uma matriz do tipo $r \times (n - r)$. Aplicando o método de eliminação de Gauss agora às colunas de RA, existe uma matriz invertível Q do tipo $n \times n$, (produto de matrizes elementares), tal que

$$RAQ = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

onde $\mathbf{0}$ é a matriz nula. Sendo Q_1 a matriz do tipo $n \times m$ que se obtém de Q considerando apenas as primeiras m colunas, tem-se

$$RAQ_1 = I.$$

Pelo que AQ_1 é invertível tendo-se

$$AQ_1R = I.$$

Logo existe $B = Q_1R$ do tipo $n \times m$ tal que $AB = I$.

17. Sejam A e B matrizes do tipo $n \times n$.

(i) Se A fôr invertível então

$$AB = ABI = AB\left(AA^{-1}\right) = A\left(BA\right)A^{-1}$$

isto é, existe $S = A$ invertível tal que

$$AB = S\left(BA\right)S^{-1}$$

ou seja, AB e BA são semelhantes. Analogamente, se B fôr invertível então AB e BA são semelhantes.

(ii) Sendo A e B semelhantes existe S invertível tal que

$$A = SBS^{-1},$$

ou seja

$$S^{-1}A = BS^{-1}.$$

Então

$$X \in \mathcal{N}\left(A\right) \Leftrightarrow AX = \mathbf{0} \Leftrightarrow S^{-1}AX = \mathbf{0} \Leftrightarrow BS^{-1}X = \mathbf{0} \Leftrightarrow S^{-1}X \in \mathcal{N}\left(B\right).$$

18. Seja A do tipo $n \times n$.

(i) Se A fôr invertível tem-se $A^{-1}A = AA^{-1} = I$. Logo A^{-1} é invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$.

(ii) Se A fôr invertível tem-se $A^{-1}A = AA^{-1} = I$. Logo $(A^{-1}A)^T = (AA^{-1})^T = I^T$. Pelo que

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = I.$$

Isto é, A^T é invertível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

(iii) Se A fôr invertível e simétrica tem-se $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ e $A = A^T$. Logo $(A^{-1}A)^T = (AA^{-1})^T = I^T$, e assim

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = I.$$

Pelo que, como A é simétrica, tem-se $A(A^{-1})^T = I$. Logo, como A é invertível, tem-se $(A^{-1})^T = A^{-1}$. Isto é, A^{-1} é simétrica.

19. **(i)** Por exemplo I e $-I$ são invertíveis no entanto $I + (-I) = \mathbf{0}$ não é invertível.

(ii) Como A e B são invertíveis por hipótese, tem-se as seguintes igualdades

$$B^{-1}(A+B) = I + B^{-1}A \quad \text{e} \quad A^{-1}(A+B) = A^{-1}B + I,$$

que são respectivamente equivalentes a

$$B^{-1}(A+B) = (A^{-1}+B^{-1})A \quad \text{e} \quad A^{-1}(A+B) = (A^{-1}+B^{-1})B.$$

Como por hipótese $A+B$ é invertível tem-se

$$I=(A^{-1}+B^{-1})A(A+B)^{-1}B \quad \text{e} \quad I=(A^{-1}+B^{-1})^{-1}B(A+B)^{-1}A.$$

Analogamente e partindo de:

$$(A+B)B^{-1}=I+AB^{-1} \quad \text{e} \quad (A+B)A^{-1}=AB^{-1}+I,$$

obtém-se

$$I=B(A+B)^{-1}A(A^{-1}+B^{-1}) \quad \text{e} \quad I=A(A+B)^{-1}B(A^{-1}+B^{-1}).$$

Deste modo $A^{-1}+B^{-1}$ é invertível e

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=A(A+B)^{-1}B=B(A+B)^{-1}A.$$

20. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^2=A$ (a matriz A diz-se neste caso idempotente).

(i) Como

$$(I-A)^2=(I-A)(I-A)=I-2A+A^2=I-2A+A=I-A$$

então $I-A$ é idempotente.

(ii) Como

$$(2A-I)(2A-I)=4A^2-4A+I=4A-4A+I=I$$

então $2A-I$ é invertível e

$$(2A-I)^{-1}=2A-I.$$

(iii) Se car $A=n$ então A é invertível pelo que $A^2=A \Leftrightarrow A^{-1}(A^2)=A^{-1}A \Leftrightarrow A=I$.

21.

$$\left(\frac{1}{2}(I+A)\right)^2 = \frac{1}{2}(I+A) \Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(I+A^2+A+A\right)=\frac{1}{2}(I+A) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}I+\frac{1}{4}A^2+\frac{1}{4}A+\frac{1}{4}A=\frac{1}{2}I+\frac{1}{2}A \Leftrightarrow A^2=I.$$

22. Sendo $A=(a_{ij})_{n\times n}$ uma matriz invertível e $B=(b_{ij})_{n\times n}$ a inversa da A, tem-se, para $k\neq 0$:

$$\left(k^{i-j}a_{ij}\right)\left(k^{i-j}b_{ij}\right)=\left(\sum_{l=1}^{n}k^{i-l}a_{il}k^{l-j}b_{lj}\right)=\left(k^{i-j}\sum_{l=1}^{n}a_{il}b_{lj}\right)=I.$$

Logo a matriz $(k^{i-j}a_{ij})$ é invertível e a sua inversa é a matriz $(k^{i-j}b_{ij})$.

23. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ do tipo 2×2. Suponhamos que $a \neq 0$, $c \neq 0$ e $ad - bc \neq 0$. Logo, tem-se:

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{cL_1 \to L_1 \\ aL_2 \to L_2}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} ac & bc & c & 0 \\ ac & ad & 0 & a \end{array}\right] \underset{-L_1+L_2 \to L_2}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} ac & bc & c & 0 \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array}\right] \underset{-\frac{bc}{ad-bc}L_2+L_1 \to L_2}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} ac & 0 & \frac{acd}{ad-bc} & -\frac{acb}{ad-bc} \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array}\right] \underset{\substack{\frac{1}{ac}L_1 \to L_1 \\ \frac{1}{ad-bc}L_2 \to L_2}}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right].$$

Logo,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Se $a = 0$ e $c = 0$, então A não é invertível.

Se $a = 0$ e $c \neq 0$, então $b \neq 0$, caso contrário A não seria invertível. Neste caso, com $a = 0$, $c \neq 0$, $b \neq 0$ e $ad - bc \neq 0$ tem-se:

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_1 \longleftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} c & d & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{\frac{1}{c}L_1 \to L_1 \\ \frac{1}{b}L_2 \to L_2}}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{d}{c} & 0 & \frac{1}{c} \\ 0 & 1 & \frac{1}{b} & 0 \end{array}\right] \underset{-\frac{d}{c}L_2+L_1 \to L_1}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{-bc} & \frac{1}{c} \\ 0 & 1 & \frac{1}{b} & 0 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{-bc} & \frac{-b}{-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{-bc} & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right].$$

Se $a \neq 0$ e $c = 0$ seria análogo. Logo, A é invertível se e só se $ad - bc \neq 0$ e

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Nota: O ex^o foi feito apenas com o recurso ao método de Gauss-Jordan. Poderia ter sido efectuada outra resolução atendendo à fórmula de inversão de matrizes:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\operatorname{cof} A)^T.$$

Observe que $ad - bc = |A|$, com $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ do tipo 2×2.

24. A matriz

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & k_n \end{bmatrix}$$

é invertível se só se $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0, \ldots, k_n \neq 0$, e a sua inversa é dada por:

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & k_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{k_n} \end{bmatrix}.$$

25. Sejam $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e α um escalar.

(i) $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(a_{ij}+b_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$.

(ii) $\operatorname{tr}(\alpha A) = \operatorname{tr}(\alpha a_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha a_{ii} = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \alpha \operatorname{tr}(A)$.

(iii) $\operatorname{tr}(A^T) = \operatorname{tr}(a_{ji}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \operatorname{tr}(a_{ij}) = \operatorname{tr}(A)$.

(iv)

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik}\right) = \operatorname{tr}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{il}\right) = \operatorname{tr}(BA).$$

26. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Não pode existir $X \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que

$$AX - XA = I$$

uma vez que

$$\operatorname{tr}(AX - XA) = \operatorname{tr}(AX) - \operatorname{tr}(XA) = \operatorname{tr}(AX) - \operatorname{tr}(AX) = 0 \neq 1 = \operatorname{tr} I$$

27. Sejam A e B matrizes do tipo $n \times n$ tais que A é simétrica e B é anti-simétrica.

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}\left((AB)^T\right) = \operatorname{tr}\left(B^T A^T\right) = \operatorname{tr}(-BA) = -\operatorname{tr}(BA) = -\operatorname{tr}(AB).$$

$$\operatorname{tr}(AB) = -\operatorname{tr}(AB) \Leftrightarrow \operatorname{tr}(AB) = 0.$$

28. Seja $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Tem-se

$$\operatorname{tr}(A^T A) = \operatorname{tr}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2.$$

Logo

$$\operatorname{tr}(A^T A) = 0 \Leftrightarrow A = \mathbf{0}.$$

29. Sejam $u, v \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ tais que $u^T v \neq -1$. Seja

$$A = I + uv^T.$$

Tem-se

$$\left(I - \frac{1}{1+u^Tv}uv^T\right)\left(I + uv^T\right) =$$

$$= I + uv^T - \frac{1}{1+u^Tv}uv^T - \frac{1}{1+u^Tv}\left(uv^T\right)\left(uv^T\right) =$$

$$= I + uv^T - \frac{1}{1+u^Tv}uv^T - \frac{1}{1+u^Tv}u\left(v^Tu\right)v^T =$$

$$= I + uv^T - \frac{1}{1+u^Tv}uv^T - \frac{v^Tu}{1+u^Tv}uv^T \underset{v^Tu=u^Tv}{=}$$

$$= I + uv^T - \left(\frac{1}{1+u^Tv} + \frac{u^Tv}{1+u^Tv}\right)uv^T =$$

$$= I + uv^T - uv^T = I.$$

Logo A é invertível e

$$A^{-1} = I - \frac{1}{1+u^Tv}uv^T.$$

Sendo $u, v \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

tem-se

$$u^Tv = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = [u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_n]$$

e

$$\left[\operatorname{tr}\left(uv^T\right)\right] = \left[\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}\right)\right] =$$

$$= \left[\operatorname{tr}\begin{bmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & \cdots & u_1v_n \\ u_2v_1 & u_2v_2 & \cdots & u_2v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_nv_1 & u_nv_2 & \cdots & u_nv_n \end{bmatrix}\right] = [u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_n].$$

Logo

$$u^Tv = \left[\operatorname{tr}\left(uv^T\right)\right].$$