Instituto Superior Técnico - Álgebra Linear - 1^o Semestre 2011/2012

LEAN - LEMat - MEAmbi - MEBiol - MEQ

Resolução da 2^a Ficha de exercícios facultativos

1. Seja V um espaço linear real e $\mathbf{0}$ o seu vector nulo.

(i) Suponhamos que $u+v=u+w$. Queremos ver que $v=w$. Ora,

$$\begin{aligned} v &= \mathbf{0}+v=((-u)+u)+v=(-u)+(u+v) \underset{u+v=u+w}{=} \\ &= (-u)+(u+w)=((-u)+u)+w=\mathbf{0}+w=w. \end{aligned}$$

Logo, $v=w$.

(ii) Queremos ver que $\lambda\mathbf{0}=\mathbf{0}$ para todo o escalar $\lambda\in\mathbb{R}$. Ora,

$$\lambda\mathbf{0}+\mathbf{0}=\lambda\mathbf{0}=\lambda(\mathbf{0}+\mathbf{0})=\lambda\mathbf{0}+\boldsymbol{\lambda}\mathbf{0} \underset{\text{por (i)}}{\Longrightarrow} \mathbf{0}=\lambda\mathbf{0}.$$

(iii) Queremos ver que $0u=\mathbf{0}$ para todo o vector $u\in\mathbf{V}$. Ora,

$$0u+\mathbf{0}=0u=(0+0)\,u=0u+0u \underset{\text{por (i)}}{\Longrightarrow} \mathbf{0}=0u.$$

(iv) Queremos ver que $-(-u)=u$ para todo o $u\in\mathbf{V}$. Ora,

$$u+(-u)=\mathbf{0}\Longrightarrow -(-u)=u.$$

(v) Queremos ver que o vector nulo $\mathbf{0}\in V$ é único. Ora, seja $w\in V$ tal que $u+w=u$, para todo o $u\in\mathbf{V}$. Então,

$$u+w=u=u+\mathbf{0} \underset{\text{por (i)}}{\Longrightarrow} w=\mathbf{0}.$$

(vi) Queremos ver que o simétrico $-u$ de um qualquer vector u de V é único. Ora, seja $w\in V$ tal que $u+w=\mathbf{0}$. Então,

$$u+w=\mathbf{0}=u+(-u) \underset{\text{por (i)}}{\Longrightarrow} w=-u.$$

(vii) Queremos ver que $(-1)u=-u$ para todo o $u\in\mathbf{V}$. Ora,

$$u+(-1)\,u=1u+(-1)\,u=(1+(-1))\,u=0u=\mathbf{0}.$$

Logo, como o simétrico é único, $(-1)u=-u$.

(viii) Queremos ver que: se $\lambda u=\mathbf{0}$, então $\lambda=0$ ou $u=\mathbf{0}$. Suponhamos que $\lambda u=\mathbf{0}$. Se $\lambda\neq 0$, então

$$u=1u=\left(\frac{1}{\lambda}\lambda\right)u=\frac{1}{\lambda}(\lambda u)=\frac{1}{\lambda}\mathbf{0} \underset{\text{por (iv)}}{=} \mathbf{0}.$$

Como $\lambda \neq 0 \Longrightarrow u = \mathbf{0}$, então $u \neq \mathbf{0} \Longrightarrow \lambda = 0$. Logo,

$$\lambda u = \mathbf{0} \Longrightarrow \lambda = 0 \vee u = \mathbf{0}$$

(ix) Queremos ver que: se $u \neq \mathbf{0}$ e $\alpha u = \beta u$, então $\alpha = \beta$. Suponhamos que $u \neq \mathbf{0}$ e $\alpha u = \beta u$. Ora, como $u \neq \mathbf{0}$ e $(\alpha - \beta) u = \mathbf{0}$, então $\alpha - \beta = 0$, atendendo a (viii). Isto é, $\alpha = \beta$.

2. O conjunto de todos os polinómios reais de grau igual a n:

$$U = \{a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \in P_n : a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad a_n \neq 0\},$$

com as operações usuais, não é um espaço linear. Por exemplo: o polinómio nulo $p(t) = \mathbf{0} \notin U$.

3. **(i)** $\varnothing \neq P_2 \subset P_3$ e:

$$P_2 = L\left(\left\{1, t, t^2\right\}\right).$$

Logo, P_2 é subespaço de P_3.

(ii) $\varnothing \neq P_n \subset P_{n+1}$ e:

$$P_n = L\left(\{1, t, ..., t^n\}\right).$$

Logo, P_n é subespaço de P_{n+1}.

(iii) $\varnothing \neq P_n \subset P$ e:

$$P_n = L\left(\{1, t, ..., t^n\}\right).$$

Logo, P_n é subespaço de P.

4. **(i)** Seja

$$U = \left\{A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) : A = A^T\right\}.$$

Sejam $A_1, A_2 \in U$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Tem-se

$$A_1 + A_2 = A_1^T + A_2^T = (A_1 + A_2)^T \in U$$

e, com $A \in U$,

$$\alpha A = \alpha A^T = (\alpha A)^T \in U.$$

Logo, U é subespaço de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

(ii) Seja

$$U = \{A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) : A \text{ é invertível}\}.$$

Por exemplo: a matriz nula não pertence a U. Logo, U não é subespaço de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

(iii) Seja

$$U = \{(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) : a_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j, \text{ com } i, j = 1, ..., n\}.$$

Sejam

$$(b_{ij}), (c_{ij}) \in U \quad \text{e} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Tem-se

$$(b_{ij}) + (c_{ij}) = (b_{ij} + c_{ij}) \in U,$$

pois $b_{ij} + c_{ij} = 0$ se $i \neq j$, com $i, j = 1, ..., n$. E, com $(a_{ij}) \in U$,

$$\alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij}) \in U,$$

pois $\alpha a_{ij} = 0$ se $i \neq j$, com $i, j = 1, ..., n$. Logo, U é subespaço de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(iv) Seja

$$U = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : A \text{ é singular}\}.$$

Por exemplo, para $n = 2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in U, \quad \text{mas} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \notin U.$$

Logo, U não é subespaço de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(v) Seja

$$U = \{(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : a_{ij} = 0 \text{ se } i > j, \text{ com } i, j = 1, ..., n\}.$$

Sejam

$$(b_{ij}), (c_{ij}) \in U \quad \text{e} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Tem-se

$$(b_{ij}) + (c_{ij}) = (b_{ij} + c_{ij}) \in U,$$

pois $b_{ij} + c_{ij} = 0$ se $i > j$, com $i, j = 1, ..., n$. E, com $(a_{ij}) \in U$,

$$\alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij}) \in U,$$

pois $\alpha a_{ij} = 0$ se $i > j$, com $i, j = 1, ..., n$. Logo, U é subespaço de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

5. Seja V o espaço linear de todas as funções reais de variável real.

(i) Seja

$$U = \{f : Dom\ f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tais que } \exists k > 0 : |f(x)| \leq k,\ \forall x \in Dom\ f\}$$

o conjunto de todas as funções limitadas. Sejam $f_1, f_2 \in U$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Tem-se

$$f_1 + f_2 \in U,$$

pois

$$|(f_1 + f_2)(x)| = |f_1(x) + f_2(x)| \leq |f_1(x)| + |f_2(x)| \underset{f_1, f_2 \in U}{\leq} k_1 + k_2,$$

para todo o $x \in Dom\ f_1 \cap Dom\ f_2$. E, com $f \in U$,

$$\alpha f \in U,$$

pois

$$|(\alpha f)(x)| = |\alpha|\,|f(x)| \underset{f \in U}{\leq} |\alpha|\,k,$$

para todo o $x \in Dom\ f$. Logo, U é subespaço de V.

(ii) Seja

$$U = \{f : Dom\ f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tais que } f(x) = f(-x),\ \forall x \in Dom\ f\}$$

o conjunto de todas as funções pares. Sejam $f_1, f_2 \in U$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Tem-se

$$f_1 + f_2 \in U,$$

pois

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) \underset{f_1, f_2 \in U}{=} f_1(-x) + f_2(-x) = (f_1 + f_2)(-x),$$

para todo o $x \in Dom\ f_1 \cap Dom\ f_2$. E, com $f \in U$,

$$\alpha f \in U,$$

pois

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \underset{f \in U}{=} \alpha f(-x) = (\alpha f)(-x),$$

para todo o $x \in Dom\ f$. Logo, U é subespaço de V.

(iii) O conjunto de todas as funções racionais, isto é, as que são quocientes de funções polinomiais, é um subespaço de V

(iv) Seja

$$U = \{f : Dom f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tais que } f \text{ é crescente}\}.$$

Se f fôr crescente então $-f$ é decrescente, isto é, $f \in U \Longrightarrow -f \notin U$. Logo, U não é subespaço de V.

(v) Seja

$$U = \{f : Dom\ f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tais que } f(0) = f(1),\ \forall x \in Dom\ f\}$$

Sejam $f_1, f_2 \in U$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Tem-se

$$f_1 + f_2 \in U,$$

pois

$$(f_1 + f_2)(0) = f_1(0) + f_2(0) \underset{f_1, f_2 \in U}{=} f_1(1) + f_2(1) = (f_1 + f_2)(1),$$

para todo o $x \in Dom\ f_1 \cap Dom\ f_2$. E, com $f \in U$,

$$\alpha f \in U,$$

pois

$$(\alpha f)(0) = \alpha f(0) \underset{f \in U}{=} \alpha f(1) = (\alpha f)(1),$$

para todo o $x \in Dom\ f$. Logo, U é subespaço de V.

(vi) Seja

$$U = \{f : Dom f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tais que } f(0) = 1 + f(1)\}.$$

Sejam $f_1, f_2 \in U$. Tem-se

$$(f_1 + f_2)(0) = f_1(0) + f_2(0) \underset{f_1, f_2 \in U}{=} 2 + f_1(1) + f_2(1) = 2 + (f_1 + f_2)(1),$$

isto é, $f_1 + f_2 \notin U$. Logo, U não é subespaço de V.

6. **Dem.** Seja $\{v_1, v_2, v_3\}$ uma base de um espaço linear V. Observe-se que

$$\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 + v_3\} \subset L(\{v_1, v_2, v_3\}),$$

pelo que

$$L(\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 + v_3\}) \subseteq L(\{v_1, v_2, v_3\}).$$

Mas, como

$$\begin{cases} v_1 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) - \frac{1}{2}(v_2 + v_3) + \frac{1}{2}(v_1 + v_3) \\ \\ v_2 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) - \frac{1}{2}(v_1 + v_3) + \frac{1}{2}(v_2 + v_3) \\ \\ v_3 = \frac{1}{2}(v_1 + v_3) - \frac{1}{2}(v_1 + v_2) + \frac{1}{2}(v_2 + v_3) \end{cases}$$

tem-se

$$L(\{v_1, v_2, v_3\}) \subseteq L(\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 + v_3\}).$$

Logo,

$$L(\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 + v_3\}) = L(\{v_1, v_2, v_3\}) = V.$$

Vejamos agora que o conjunto $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 + v_3\}$ é linearmente independente:
Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tais que $\lambda_1(v_1 + v_2) + \lambda_2(v_2 + v_3) + \lambda_3(v_1 + v_3) = \mathbf{0}$. Isto é,

$$(\lambda_1 + \lambda_3)v_1 + (\lambda_1 + \lambda_2)v_2 + (\lambda_2 + \lambda_3)v_3 = \mathbf{0}.$$

Como $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de V, em particular é linearmente independente. Logo,

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

o que é equivalente ao sistema homogéneo:

$$A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

com $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Como $\det A = 2 \neq 0$, então A é invertível e tem-se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
Logo, $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 + v_3\}$ é uma base de V pois trata-se de um conjunto de vectores linearmente independente que gera V.

7. Seja A uma matriz (real) invertível do tipo $n \times n$. Suponhamos que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$. Queremos provar que $\{Av_1, Av_2, \ldots, Av_n\}$ é também uma base de $\mathbb{R}^n$.

   Dem. Vejamos primeiro que o conjunto $\{Av_1, Av_2, \ldots, Av_n\}$ é linearmente independente. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lambda_1(Av_1) + \lambda_2(Av_2) + \cdots + \lambda_n(Av_n) = \mathbf{0}.$$

Queremos ver que $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. Observe-se que

$$\begin{aligned}\lambda_1(Av_1) + \lambda_2(Av_2) + \cdots + \lambda_n(Av_n) &= A(\lambda_1 v_1) + A(\lambda_2 v_2) + \cdots + A(\lambda_n v_n)\\ &= A(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n).\end{aligned}$$

Logo,

$$\lambda_1(Av_1) + \lambda_2(Av_2) + \cdots + \lambda_n(Av_n) = \mathbf{0} \Longleftrightarrow A(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n) = \mathbf{0}.$$

Como A é invertível, tem-se

$$\begin{aligned}A^{-1}A(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n) &= A^{-1}\mathbf{0} \Leftrightarrow\\ I(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n) &= \mathbf{0} \Leftrightarrow\\ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Como $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$, então

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Logo, $\{Av_1, Av_2, \ldots, Av_n\}$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ formado por n vectores linearmente independentes. Como a dimensão de $\mathbb{R}^n$ é n, então

$$\{Av_1, Av_2, \ldots, Av_n\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^n$.

8. Sejam V um espaço linear e $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Dem. ($\Rightarrow$) Suponhamos que S é uma base de V. Queremos provar que todo o vector de V se escreve de maneira única como combinação linear dos elementos de S. Assim, seja v um vector qualquer de V. Como S é uma base de V, então em particular gera V. Pelo que, existem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

Suponhamos que também existiam $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$v = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_n v_n.$$

Logo,

$$(\lambda_1 - \mu_1)v_1 + (\lambda_2 - \mu_2)v_2 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)v_n = \mathbf{0}.$$

Como $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é um conjunto linearmente independente (por ser base), então temos

$$\lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \ldots, \lambda_n = \mu_n.$$

Logo, conclui-se que todo o vector de V se escreve de maneira única como combinação linear dos elementos de S.

($\Leftarrow$) Suponhamos agora que todo o vector de V se escreve de maneira única como combinação linear dos elementos de S. Queremos provar que $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de V. Como todo o vector de V se escreve como combinação linear dos elementos de S, então S gera V. Falta ver que S é linearmente independente. Assim, sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = \mathbf{0}.$$

Como

$$\mathbf{0} = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n,$$

e uma vez que por hipótese todo o vector de V se escreve de maneira **única** como combinação linear dos elementos de S, conclui-se que

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Logo, $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de V. Fica assim provada a equivalência referida na questão.

9. Seja $\{v_1, v_2\}$ uma base de um espaço linear U. Considere os vectores

$$w_1 = av_1 + bv_2 \qquad \text{e} \qquad w_2 = cv_1 + dv_2,$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Queremos provar que $\{w_1, w_2\}$ é também uma base de U se e só se $ad \neq bc$.

Dem. ($\Leftarrow$) Suponhamos que $ad \neq bc$. Vejamos que $\{w_1, w_2\}$ é uma base de U. Vamos começar por verificar que o conjunto $\{w_1, w_2\}$ é linearmente independente. Sejam $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \mathbf{0}.$$

Queremos ver que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Observe-se que

$$\begin{aligned} \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 &= \lambda_1(av_1 + bv_2) + \lambda_2(cv_1 + dv_2) \\ &= (\lambda_1 a + \lambda_2 c)v_1 + (\lambda_1 b + \lambda_2 d)v_2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\lambda_1 a + \lambda_2 c)v_1 + (\lambda_1 b + \lambda_2 d)v_2 = \mathbf{0}.$$

Como o conjunto $\{v_1, v_2\}$ é uma base de U, em particular é linearmente independente. Logo,

$$\lambda_1 a + \lambda_2 c = \lambda_1 b + \lambda_2 d = 0 \in \mathbb{R}.$$

Isto é,

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ou seja,

$$A\lambda = \mathbf{0},$$

onde $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Como $ad \neq bc$ e $\det A = ad - bc$, então $\det A \neq 0$, isto é, A é invertível e como tal:

$$A^{-1}A\lambda = A^{-1}\mathbf{0} \Leftrightarrow I\lambda = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda = \mathbf{0}.$$

Logo, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ e deste modo o conjunto $\{w_1, w_2\}$ é linearmente independente. Como $\dim U = 2$ e como w_1, w_2 são dois vectores de U, linearmente independentes, então conclui-se que $\{w_1, w_2\}$ é uma base de U (não sendo necessário verificar se o conjunto $\{w_1, w_2\}$ gera U).

($\Rightarrow$) Reciprocamente, se $\{w_1, w_2\}$ é uma base de U, em particular é linearmente independente, e como tal tem-se

$$(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \mathbf{0}) \Rightarrow (\lambda_1 = \lambda_2 = 0).$$

Isto é, a equação

$$A\lambda = \mathbf{0},$$

onde $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, tem como solução única $\lambda = \mathbf{0}$. O que é equivalente a ter-se $\det A \neq 0$, isto é, $ad \neq bc$.

Demonstração alternativa. Como o conjunto $\{v_1, v_2\}$ é uma base do espaço linear U então $\dim U = 2$. Logo, se o conjunto $\{w_1, w_2\}$ fôr linearmente independente então será uma base do espaço linear U. Assim, bastará provar que o conjunto $\{w_1, w_2\}$ é linearmente independente se e só se a matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ fôr invertível. Seja $\mathbf{0}$ o vector nulo do espaço linear U. Sejam $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \mathbf{0}.$$

Queremos ver que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ se e só se a matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ fôr invertível. Observe-se que

$$\begin{aligned} \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 &= \lambda_1(av_1 + bv_2) + \lambda_2(cv_1 + dv_2) \\ &= (\lambda_1 a + \lambda_2 c)v_1 + (\lambda_1 b + \lambda_2 d)v_2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\lambda_1 a + \lambda_2 c)v_1 + (\lambda_1 b + \lambda_2 d)v_2 = \mathbf{0}.$$

Como o conjunto $\{v_1, v_2\}$ é uma base do espaço linear U, em particular é linearmente independente. Logo,

$$\lambda_1 a + \lambda_2 c = \lambda_1 b + \lambda_2 d = 0 \in \mathbb{R}.$$

Isto é,

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ou seja, $A\lambda = \mathbf{0}'$, onde $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{0}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Como a equação $A\lambda = \mathbf{0}'$ apenas admite a solução trivial $\lambda = \mathbf{0}'$ se e só se a matriz A fôr invertível e como a matriz A é invertível se e só se a matriz $A^T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ fôr invertível, tem-se então o resultado pretendido.

10. Sejam A uma matriz $m \times n$ e B uma matriz $n \times p$. Mostre que

$$\dim \mathcal{C}(AB) = \dim \mathcal{C}(B) - \dim(\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(B)).$$

Sugestão: Considere (no caso em que $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(B) \neq \{\mathbf{0}\}$) uma base $\{x_1, \ldots, x_s\}$ para $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(B)$ e suponha (no caso em que $AB \neq \mathbf{0}$) que $\{x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_t\}$ é uma base para $\mathcal{C}(B)$. Mostre que $\{Ay_1, \ldots, Ay_t\}$ é uma base para $\mathcal{C}(AB)$.

Dem. Se $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(B) = \{\mathbf{0}\}$, então $\dim(\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(B)) = 0$ e $\dim \mathcal{C}(AB) = \dim \mathcal{C}(B)$.

Suponhamos então que $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(B) \neq \{\mathbf{0}\}$. Seja $\{x_1, \ldots, x_s\}$ uma base para $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(B)$ e suponhamos que $AB \neq \mathbf{0}$ (no caso em que $AB = \mathbf{0}$ tem-se $\dim \mathcal{C}(AB) = 0$ e

$$\dim \mathcal{C}(B) = \dim(\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(B)) \quad \text{uma vez que} \quad \mathcal{C}(B) \subset \mathcal{N}(A)).$$

Seja $\{x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_t\}$ é uma base para $\mathcal{C}(B)$. Nesse caso $\dim \mathcal{C}(AB) = s + t$. Vejamos que $\{Ay_1, \ldots, Ay_t\}$ é uma base para $\mathcal{C}(AB)$.

Seja $b \in \mathcal{C}(AB)$. Tem-se $ABz = b$ para algum z. Mas, como $Bz \in \mathcal{C}(B)$, então existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_t$ tais que

$$Bz = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{t} \beta_j y_j.$$

Logo,

$$b = ABz = A\left(\sum_{i=1}^{s} \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^{t} \beta_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i A x_i + \sum_{j=1}^{t} \beta_j A y_j \underset{\{x_1,\ldots,x_s\} \subset \mathcal{N}(A)}{=} \sum_{j=1}^{t} \beta_j A y_j,$$

isto é, $\{Ay_1, \ldots, Ay_t\}$ gera $\mathcal{C}(AB)$.

Vejamos que $\{Ay_1, \ldots, Ay_t\}$ é linearmente independente. Suponhamos que existiam escalares $\xi_1, \ldots, \xi_t$ tais que

$$\mathbf{0} = \sum_{j=1}^{t} \xi_j A y_j.$$

Tem-se

$$\mathbf{0} = \sum_{j=1}^{t} \xi_j A y_j = A\left(\sum_{j=1}^{t} \xi_j y_j\right)$$

e então $\sum_{j=1}^{t} \xi_j y_j \in \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(B)$. E assim, existem escalares $\eta_1, \ldots, \eta_s$ tais que

$$\sum_{j=1}^{t} \xi_j y_j = \sum_{i=1}^{s} \eta_i x_i.$$

$$\text{Como} \qquad \sum_{j=1}^{t} \xi_j y_j = \sum_{i=1}^{s} \eta_i x_i \Leftrightarrow \left(\sum_{j=1}^{t} \xi_j y_j - \sum_{i=1}^{s} \eta_i x_i = \mathbf{0}\right)$$

e atendendo a que $\{x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_t\}$ é uma base para $\mathcal{C}(B)$, tem-se

$$\xi_1 = \ldots = \xi_t = \eta_1 = \ldots = \eta_s = 0$$

e assim o conjunto $\{Ay_1, \ldots, Ay_t\}$ é linearmente independente.

Logo, o conjunto $\{Ay_1, \ldots, Ay_t\}$ é uma base para $\mathcal{C}(AB)$ e assim

$$\dim \mathcal{C}(B) = s + t = \dim(\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(B)) + \dim \mathcal{C}(AB) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dim \mathcal{C}(AB) = \dim \mathcal{C}(B) - \dim(\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(B)).$$

11. Considere os seguintes r vectores de $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{x^1} = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}), \mathbf{x^2} = (x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}), \ldots, \mathbf{x^r} = (x_{r1}, x_{r2}, \ldots, x_{rn}).$$

Mostre que se $|x_{jj}| > \sum\limits_{i=1(i\neq j)}^{r} |x_{ij}|$ para todo o $j = 1, \ldots, r$ então o conjunto

$$\left\{\mathbf{x^1}, \mathbf{x^2}, \ldots, \mathbf{x^r}\right\}$$

é linearmente independente.

Sugestão: Considere

$$\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) = \alpha_1 \mathbf{x^1} + \alpha_2 \mathbf{x^2} + \cdots + \alpha_r \mathbf{x^r},$$

com $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ e mostre que se existir $\alpha_j \neq 0$ (com $j \in \{1, \ldots, r\}$) tal que

$$|\alpha_j| \geqslant |\alpha_i|,$$

para todo o $i = 1, \ldots, r$, então $v_j \neq 0$.

Dem. Seja

$$\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) = \alpha_1 \mathbf{x^1} + \alpha_2 \mathbf{x^2} + \cdots + \alpha_r \mathbf{x^r},$$

com $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$. Suponhamos que existe $\alpha_j \neq 0$ (com $j \in \{1, \ldots, r\}$) tal que

$$|\alpha_j| \geqslant |\alpha_i|,$$

para todo o $i = 1, \ldots, r$. Queremos mostrar que $v_j \neq 0$.

Suponhamos então (com vista a uma contradição) que $v_j = 0$. Nesse caso, teríamos

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_{ij}}_{= v_j} = 0 \Leftrightarrow \alpha_j x_{jj} = -\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{r} \alpha_i x_{ij}.$$

Como

$$|\alpha_j|\,|x_{jj}| = |\alpha_j x_{jj}| = \left| -\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{r} \alpha_i x_{ij} \right| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{r} |\alpha_i x_{ij}| = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{r} |\alpha_i|\,|x_{ij}| \underset{\substack{|\alpha_i| \leq |\alpha_j| \\ i=1,\ldots,r}}{\leq} |\alpha_j| \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{r} |x_{ij}| \right)$$

e $\alpha_j \neq 0$ (com $j \in \{1, \ldots, r\}$) então teríamos

$$|x_{jj}| \leq \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{r} |x_{ij}| \right)$$

o que contradiz a hipótese de se ter

$$|x_{jj}| > \sum_{i=1(i\neq j)}^{r} |x_{ij}|$$

para todo o $j = 1, \ldots, r$. Logo mostrámos que a existir $\alpha_j \neq 0$ (com $j \in \{1, \ldots, r\}$) tal que $|\alpha_j| \geqslant |\alpha_i|$, para todo o $i = 1, \ldots, r$, então $v_j \neq 0$, o que equivale a dizer que o conjunto

$$\left\{\mathbf{x^1}, \mathbf{x^2}, \ldots, \mathbf{x^r}\right\}$$

é linearmente independente.

12. Seja $y \in \mathcal{C}(A+B)$. Então existe x tal que

$$y = (A+B)\,x = Ax + Bx \in \mathcal{C}(A) + \mathcal{C}(B).$$

Logo

$$\mathcal{C}(A+B) \subset \mathcal{C}(A) + \mathcal{C}(B).$$

13. Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Vejamos que

$$\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}\left(A^T\right) = \{\mathbf{0}\}.$$

Seja $y \in \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}\left(A^T\right)$. Então existe x tal que $Ay = \mathbf{0}$ e $y = A^T x$. Logo

$$y^T = x^T A$$

e

$$y^T y = \left(x^T A\right) y = x^T (Ay) = x^T \mathbf{0} = 0.$$

Isto é

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = y^T y = 0$$

ou seja $y = (y_1, ..., y_n) = (0, ..., 0) = \mathbf{0}$. Logo,

$$\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{L}(A) = \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}\left(A^T\right) = \{\mathbf{0}\}.$$

14. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^2 = A$. Seja $u \in \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(A)$. Então $Au = \mathbf{0}$ e $u = Av$ para algum v. Logo $\mathbf{0} = Au = A^2 v = Av$ pelo que $v \in \mathcal{N}(A)$. Assim $u = Av = \mathbf{0}$ e deste modo $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(A) = \{\mathbf{0}\}$.

15. Seja $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $A \neq \mathbf{0}$ e $A^2 = \mathbf{0}$. Como $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \backslash \{\mathbf{0}\}$ e A não é invertível pois $(\det A)^2 = \det\left(A^2\right) = 0 \Leftrightarrow \det A = 0$, então $\operatorname{car} A \in \{1, 2\}$. Por outro lado, como $A^2 = \mathbf{0}$ então $\mathcal{C}(A) \subseteq \mathcal{N}(A)$ pelo que $\dim \mathcal{C}(A) \leq \dim \mathcal{N}(A)$. Finalmente, atendendo a que

$$3 = \dim \mathcal{N}(A) + \operatorname{car} A$$

então $\operatorname{car} A = 1$.

16. Como

$$B = C + B - C$$

e

$$\mathcal{C}(B) = \mathcal{C}(C + B - C) \subset \mathcal{C}(C) + \mathcal{C}(B - C)$$

então
$$\operatorname{car} B = \dim \mathcal{C}(B) \leq \dim \mathcal{C}(C) + \dim \mathcal{C}(B-C) = \operatorname{car} C + \operatorname{car}(B-C).$$
Pelo que $\operatorname{car} B - \operatorname{car} C \leq \operatorname{car}(B-C)$. De um modo análogo, como
$$C = B + [-(B-C)]$$
e
$$\mathcal{C}(C) = \mathcal{C}(B + [-(B-C)]) \subset \mathcal{C}(B) + \mathcal{C}(B-C)$$
então
$$\operatorname{car} C - \operatorname{car} B \leq \operatorname{car}(B-C).$$
Logo
$$|\operatorname{car} B - \operatorname{car} C| \leq \operatorname{car}(B-C).$$

17. Sejam $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tais que
$$\alpha v + \beta A v + \gamma A^2 v + \delta A^3 v = \mathbf{0}.$$
Multiplicando a igualdade anterior por A^3 e atendendo a que $A^4 = \mathbf{0}$ e assim
$$A^5 = A^6 = A^7 = \mathbf{0},$$
então
$$\alpha A^3 v = \mathbf{0}$$
e deste modo $\alpha = 0$ uma vez que
$$A^3 v \neq \mathbf{0} (v \notin \mathcal{N}(A^3)).$$
Analogamente: multiplicando a igualdade
$$\beta A v + \gamma A^2 v + \delta A^3 v = \mathbf{0}$$
por A^2 tem-se $\beta = 0$, multiplicando a igualdade
$$\gamma A^2 v + \delta A^3 v = \mathbf{0}$$
por A tem-se $\gamma = 0$ e finalmente de
$$\delta A^3 v = \mathbf{0}$$
obtém-se $\delta = 0$. Logo, o conjunto
$$\left\{ v, Av, A^2 v, A^3 v \right\}$$
é linearmente independente.

18. Sendo $A \in \mathcal{M}_{5\times 6}(\mathbb{R})$, tem-se $A^T A \in \mathcal{M}_{6\times 6}(\mathbb{R})$. Como
$$\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}\left(A^T A\right)$$
e
$$\dim \mathcal{N}(A) = 6 - \operatorname{car} A \geq 6 - 5 = 1$$

então
$$1 \leq \dim \mathcal{N}\left(A\right) \leq \dim \mathcal{N}\left(A^T A\right).$$
Logo
$$\dim \mathcal{N}\left(A^T A\right) \neq 0$$
pelo que $A^T A$ não é invertível.