Instituto Superior Técnico - Álgebra Linear - 1^o Semestre 2011/2012

LEAN - LEMat - MEAmbi - MEBiol - MEQ

Resolução da 3^a Ficha de exercícios facultativos

1. Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear invertível. Seja u um vector próprio de T associado a um valor próprio λ de T. Verifique que u é também um vector próprio de T^{-1} e determine o valor próprio de T^{-1} que lhe está associado.

Dem. Tem-se
$$T(u) = \lambda u,$$
com $u \neq 0$. Como T é invertível e T^{-1} é linear,
$$u = T^{-1}(\lambda u) = \lambda T^{-1}(u).$$
Por outro lado, tem-se $\lambda \neq 0$ uma vez que $u \neq 0$ e T é invertível. Logo,
$$T^{-1}(u) = \lambda^{-1} u.$$
Isto é, u é um vector próprio de T^{-1} associado ao valor próprio λ^{-1} de T^{-1}.

2. Seja V um espaço linear. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear. Seja u um vector próprio de T associado a um valor próprio λ de T. Verifique que u é também um vector próprio de T^2 associado ao valor próprio λ^2 de T^2.

Dem. Tem-se
$$T(u) = \lambda u,$$
com $u \neq 0$. Logo, como T é linear,
$$T^2(u) = (T \circ T)(u) = T(T(u)) = T(\lambda u) = \lambda T(u) = \lambda \lambda u = \lambda^2 u,$$
isto é, u é um vector próprio de T^2 associado ao valor próprio λ^2 de T^2.

3. Seja A uma matriz do tipo $n \times n$. Mostre que se λ é um valor próprio de A então λ^k é um valor próprio de A^k, onde k é um inteiro positivo.

Dem. Sendo k um inteiro positivo, tem-se
$$A^k - \lambda^k I = (A - \lambda I)(A^{k-1} + A^{k-2}\lambda + \cdots + A\lambda^{k-2} + \lambda^{k-1} I).$$
Logo, se λ é um valor próprio de A então λ^k é um valor próprio de A^k, onde k é um inteiro positivo.

4. Uma matriz A do tipo $n \times n$ diz-se nilpotente se $A^l = 0$ para algum inteiro positivo l. Mostre que se A é nilpotente então o único valor próprio de A é 0.

Dem. Suponhamos que $A^l = 0$ para algum inteiro positivo l. Seja λ um valor próprio de A. Pelo ex^o anterior, λ^l é um valor próprio de A^l. Como $A^l = 0$, então:

$$0 = \det(A^l - \lambda^l I) = \det(-\lambda^l I) = (-1)^n \lambda^l.$$

Logo $\lambda = 0$ e como tal, 0 é o único valor próprio de A.

5. Seja A uma matriz $n \times n$. Verifique que A e A^T têm os mesmos valores próprios.

Dem. Tem-se

$$\det(A - \lambda I) = \det\left((A - \lambda I)^T\right) = \det(A^T - \lambda I).$$

Isto é, as matrizes A e A^T têm os mesmos valores próprios.

6. Seja A uma matriz $n \times n$ cuja soma das suas colunas é constante e igual a r. Mostre que r é um valor próprio de A.

Dem. Tem-se

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ r \\ \vdots \\ r \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Logo r é um valor próprio de A, associado ao vector próprio $(1, 1, \ldots, 1)$.

7. Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Seja P uma matriz diagonalizante para A. Determine uma matriz diagonalizante para A^T em termos de P.

Dem. Tem-se

$$D = PAP^{-1}$$

e

$$D = D^T = \left(PAP^{-1}\right)^T = \left(P^{-1}\right)^T A^T P^T.$$

Logo, a matriz $\left(P^{-1}\right)^T$ é uma matriz diagonalizante para A^T.

8. Seja Q uma matriz $n \times n$ real ortogonal, isto é, tal que $Q^{-1} = Q^T$. Mostre que se n fôr ímpar então Q tem o valor próprio 1 ou tem o valor próprio -1.

Dem. Atendendo a que $QQ^T = I$ tem-se

$$(\det Q)^2 = \det Q \det Q = \det Q \det\left(Q^T\right) = \det\left(QQ^T\right) = \det I = 1 \Leftrightarrow (\det Q = 1 \text{ ou } \det Q = -1).$$

Logo:

Se $\det Q = 1$

$$\det(Q-I) = \det\left[Q\left(I-Q^T\right)\right] = \det Q \det\left(I-Q^T\right) =$$

$$= (-1)^n \det Q \det\left(Q^T - I\right) \underset{n \text{ é ímpar}}{=} -\det Q \det\left[(Q-I)^T\right] = -\det(Q-I) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\det(Q-I) = 0 \Leftrightarrow \det(Q-I) = 0$$

isto é, 1 é valor próprio de Q;

Se $\det Q = -1$

$$\det(Q+I) = \det\left[Q\left(I+Q^T\right)\right] = \det Q \det\left(I+Q^T\right) =$$

$$= \det Q \det\left(Q^T + I\right) = -\det\left[(Q+I)^T\right] = -\det(Q+I) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\det(Q+I) = 0 \Leftrightarrow \det(Q+I) = 0 \Leftrightarrow \det(Q-(-1)I) = 0$$

isto é, -1 é valor próprio de Q.

9. Determine uma matriz A real 2×2 tal que $\det A < 0$. Mostre que A é diagonalizável.

Dem. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Sejam λ_1 e λ_2 dois valores próprios de A. Como

$$\lambda_1\lambda_2 = \det A < 0$$

então λ_1 e λ_2 são dois valores próprios distintos de A, pelo que os vectores próprios correspondentes são linearmente independentes, constituindo assim uma base de $\mathbb{R}^2$, razão pela qual A é diagonalizável.

10. Seja A uma matriz $n\times n$ e seja λ um valor próprio de A com multiplicidade algébrica igual a n. Mostre que se A fôr diagonalizável então A é uma matriz diagonal.

Dem. Seja λ um valor próprio de A com multiplicidade algébrica igual a n. Como A é do tipo $n\times n$, então λ é o único valor próprio de A. Assim, A fôr diagonalizável se e só se

$$\dim \mathcal{N}(A-\lambda I) = m_g(\lambda) = m_a(\lambda) = n$$

o que é equivalente a ter-se

$$A - \lambda I = \mathbf{0} \text{ (matriz nula)}$$

isto é,

$$A = \lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

ou seja, A é uma matriz diagonal.

11. Seja V um espaço linear e seja $T : V \to V$ uma transformação linear tal que todos os vectores não nulos de V são vectores próprios. Mostre que T tem um único valor próprio.

Dem. Suponhamos, com vista a uma contradição, que λ_1 e λ_2 eram dois valores próprios distintos de T. Sejam v_1 e v_2 vectores próprios de T associados respectivamente aos valores próprios λ_1 e λ_2. Logo, o conjunto $\{v_1, v_2\}$ é linearmente independente. Por outro lado

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$$

e como cada vector não nulo de V é um vector próprio de T, então $v_1 + v_2$ é um vector próprio de T e assim, existe um escalar λ_3 tal que

$$T(v_1 + v_2) = \lambda_3 (v_1 + v_2) = \lambda_3 v_1 + \lambda_3 v_2.$$

Deste modo, tem-se

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_3 v_1 + \lambda_3 v_2$$

ou seja

$$(\lambda_1 - \lambda_3) v_1 + (\lambda_3 - \lambda_2) v_2 = \mathbf{0}.$$

Como o conjunto $\{v_1, v_2\}$ é linearmente independente, então ter-se-ia

$$\lambda_1 = \lambda_3 \qquad \text{e} \qquad \lambda_3 = \lambda_2$$

isto é,

$$\lambda_1 = \lambda_2$$

contrariando o facto de se ter assumido que λ_1 e λ_2 eram dois valores próprios distintos de T.

Logo, T tem um único valor próprio.

12. Sejam A e B duas matrizes do tipo $n \times n$. Mostre que AB e BA têm os mesmos valores próprios.

Dem. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Atendendo a que

$$\det(AB - 0I) = \det(AB) = \det(BA) = \det(BA - 0I),$$

0 é valor próprio de AB se e só se 0 é valor próprio de BA.

Seja λ um valor próprio de AB, com $\lambda \neq 0$. Então existe $u \neq \mathbf{0}$ tal que $ABu = \lambda u$. Seja $w = Bu$. Como $u \neq \mathbf{0}$ e B é invertível então $w \neq \mathbf{0}$. Logo,

$$(BA) w = (BA) Bu = B(AB) u = B\lambda u = \lambda (Bu) = \lambda w.$$

Isto é, λ é valor próprio de BA com w como vector próprio associado.

Seja λ um valor próprio de BA, com $\lambda \neq 0$. Então existe $u \neq \mathbf{0}$ tal que $BAu = \lambda u$. Seja $w = Au$. Como $u \neq \mathbf{0}$ e A é invertível então $w \neq \mathbf{0}$. Logo,

$$(AB) w = (AB) Au = A(BA) u = A\lambda u = \lambda (Au) = \lambda w.$$

Isto é, λ é valor próprio de AB com w como vector próprio associado.

13. Sejam A e B duas matrizes tais que $AB = BA$. Mostre que A e B têm um vector próprio em comum.

Sugestão: Sendo λ um valor próprio de A, considere C a matriz cujas colunas formam uma base ordenada $\mathcal{S}$ de $\mathcal{N}(A - \lambda I)$ e verifique que $(A - \lambda I) BC = \mathbf{0}$. Finalmente considere a matriz P cujas colunas são respectivamente as coordenadas das colunas de BC em relação à base $\mathcal{S}$ e sendo v um vector próprio de P mostre que Cv é um vector próprio comum a A e B.

Dem. Suponhamos que as matrizes quadradas A e B são do tipo $n \times n$. Seja λ um valor próprio de A. Tem-se $\mathcal{N}(A - \lambda I) \neq \{\mathbf{0}\}$. Seja $r = \dim \mathcal{N}(A - \lambda I)$. Seja C a matriz $n \times r$ cujas colunas formam uma base ordenada $\mathcal{S}$ de $\mathcal{N}(A - \lambda I)$. Tem–se

$$(A - \lambda I) BC = ABC - \lambda BC \underset{AB=BA}{=} BAC - \lambda BC = B(A - \lambda I) C = B\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Seja $P = (p_{ij})$ a matriz $r \times r$ cujas colunas são respectivamente as coordenadas das colunas de BC em relação à base $\mathcal{S}$. Tem-se, para $k = 1, ..., r$

$$\underbrace{[BC]_{*k}}_{\text{coluna } k \text{ de } BC} = \sum_{i=1}^{r} p_{ik} \underbrace{[C]_{*i}}_{\text{coluna } i \text{ de } C} = \sum_{i=1}^{r} [C]_{*i}\, p_{ik}.$$

Logo, tem-se

$$BC = CP.$$

Seja v um vector próprio de P associado a um valor próprio μ. Tem-se $v \neq \mathbf{0}$ e $Cv \neq \mathbf{0}$ pois C tem característica máxima (= n^o de colunas). Além disso,

$$B(Cv) = (BC)v = (CP)v = C(Pv) = C(\mu v I) = \mu (Cv),$$

isto é, Cv é um vector próprio de B associado ao valor próprio μ.

Por outro lado, tem-se

$$A(Cv) = (AC)v = (\lambda IC)v = \lambda (Cv),$$

isto é, Cv é um vector próprio de A associado ao valor próprio λ.

Logo, Cv é um vector próprio comum a A e B.

14. Seja A uma matriz $n \times n$ e sejam λ_1, λ_2 escalares, com $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tais que

$$(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) = \mathbf{0}.$$

Atendendo a que

$$\det(A - \lambda_1 I) \det(A - \lambda_2 I) = 0 \Leftrightarrow (\det(A - \lambda_1 I) = 0 \quad \text{ou} \quad \det(A - \lambda_2 I) = 0)$$

então λ_1 é valor próprio de A ou λ_2 é valor próprio de A. Suponhamos sem perda de generalidade (uma vez que $(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) = (A - \lambda_2 I)(A - \lambda_1 I)$) que λ_1 é um valor próprio de A. Atendendo a que

$$\mathcal{C}(A - \lambda_2 I) \subset \mathcal{N}(A - \lambda_1 I) \neq \{\mathbf{0}\}$$

então

$$n - \operatorname{nul}(A - \lambda_2 I) = \operatorname{car}(A - \lambda_2 I) = \dim \mathcal{C}(A - \lambda_2 I) \leq \dim \mathcal{N}(A - \lambda_1 I) = \operatorname{nul}(A - \lambda_1 I)$$

isto é,

$$n \leq \operatorname{nul}(A - \lambda_1 I) + \operatorname{nul}(A - \lambda_2 I).$$

Logo, atendendo a que $\operatorname{nul}(A - \lambda_1 I) + \operatorname{nul}(A - \lambda_2 I) \leq n$, tem-se

$$\operatorname{nul}(A - \lambda_1 I) + \operatorname{nul}(A - \lambda_2 I) = n$$

ou seja, A é diagonalizável.

15. Se λ é valor próprio de A então λ^{k+1} é valor próprio de A^{k+1}, pois $Au = \lambda u$ implica $A^{k+1}u = \lambda^{k+1}u$. Sendo A é nilpotente, então $\lambda^{k+1} = 0$, logo $\lambda = 0$ é o único valor próprio de A.

Se A fosse diagonalizável então existiria uma matriz invertível S tal que $A = S^{-1}DS$ onde D é a matriz diagonal cujas entradas na diagonal são formadas pelos valores próprios de A. Como $\lambda = 0$ é o único valor próprio de A, $D = \mathbf{0}$ e portanto $A = S^{-1}\mathbf{0}S = \mathbf{0}$, o que é absurdo porque $A^k \neq \mathbf{0}$.