Instituto Superior Técnico - Álgebra Linear - 1^o Semestre 2011/2012

LEAN - LEMat - MEAmbi - MEBiol - MEQ

Resolução da 4^a Ficha de exercícios facultativos

1. Seja V um espaço euclidiano real. As alíneas **(i)**, **(ii)**, **(iii)** e **(iv)** são consequência da definição de produto interno.

   Sejam $u, v, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (v) Atendendo à condição de linearidade do produto interno:

$$\begin{aligned}\langle u+w, v+w\rangle &= \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle + \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle = \\ &= \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle + \langle w,v\rangle + \|w\|^2 .\end{aligned}$$

   (vi) Atendendo à condição de linearidade do produto interno:

$$\langle u, \mathbf{0}\rangle = \langle u, 0v\rangle = 0\,\langle u,v\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle \mathbf{0}, u\rangle = \langle 0v, u\rangle = 0\,\langle v,u\rangle = 0.$$

   (vii) Se $\langle u,v\rangle = 0$ então

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle = \|u\|^2 + 2\,\langle u,v\rangle + \|v\|^2 = \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 = \\ &= \|u\|^2 - 2\,\langle u,v\rangle + \|v\|^2 = \\ &= \langle u-v, u-v\rangle = \\ &= \|u-v\|^2 ,\end{aligned}$$

   isto é, $\|u+v\| = \|u-v\|$.

   Se $\|u+v\| = \|u-v\|$ então $\|u+v\|^2 = \|u-v\|^2$ e esta última equação é equivalente à equação

$$\|u\|^2 + 2\,\langle u,v\rangle + \|v\|^2 = \|u\|^2 - 2\,\langle u,v\rangle + \|v\|^2 ,$$

   isto é, $\langle u,v\rangle = 0$.

   (viii) Atendendo a que

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \|u\|^2 + 2\,\langle u,v\rangle + \|v\|^2 ,$$

   então tem-se $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ se e só se $\langle u,v\rangle = 0$.

   (ix) Seja $c \in \mathbb{R}$. Se $\langle u,v\rangle = 0$ então

$$\begin{aligned}\|u+cv\|^2 &= \langle u+cv, u+cv\rangle = \|u\|^2 + 2c\,\langle u,v\rangle + c^2\,\|v\|^2 = \\ &= \|u\|^2 + c^2\,\|v\|^2 \geq \|u\|^2 ,\end{aligned}$$

   para todo o real c, isto é, $\|u+cv\| \geq \|u\|$ para todo o real c.

   Se $\|u+cv\| \geq \|u\|$ para todo o real c, então

$$\|v\|^2\,c^2 + 2\,\langle u,v\rangle\,c \geq 0,$$

para todo o real c, se e só se $\langle u, v \rangle = 0$ (fórmula resolvente).

(x) Se $\langle u+v, u-v \rangle = 0$ então

$$0 = \langle u+v, u-v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2 .$$

Logo, $\|u\| = \|v\|$.

Se $\|u\| = \|v\|$ então

$$0 = \|u\|^2 - \|v\|^2 = \langle u+v, u-v \rangle .$$

Logo, $\langle u+v, u-v \rangle = 0$.

(xi)

$$\begin{aligned} \|u-v\|^2 + \|u+v\|^2 &= \langle u-v, u-v \rangle + \langle u+v, u+v \rangle = \\ &= \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 + \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 = \\ &= 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 . \end{aligned}$$

2. Seja V um espaço euclidiano real.

(i) Seja $u \in V$. Se $\langle u, v \rangle = 0$ para qualquer $v \in V$ então, em particular para $v = u$, tem-se

$$\langle u, u \rangle = 0.$$

Logo, $u = \mathbf{0}$.

(ii) Sejam $u, v \in V$. Se $u = v$ então

$$\langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle ,$$

para qualquer $w \in V$.

Se $\langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle$ para qualquer $w \in V$, então

$$\langle u - v, w \rangle = 0,$$

para qualquer $w \in V$. Logo, atendendo à alínea anterior, tem-se $u = v$.

3. Seja V um espaço euclidiano com $\dim V = n$. Seja $\mathcal{S} = \{u_1, ..., u_n\}$ uma base ortonormada de V. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear. A matriz $A = (a_{ij})$ que representa T em relação à base $\mathcal{S}$ é dada por

$$A = (a_{ij}) = (\langle T(u_j), u_i \rangle) ,$$

uma vez que, para $j = 1, ..., n$,

$$T(u_j) = \langle T(u_j), u_1 \rangle u_1 + ... + \langle T(u_j), u_n \rangle u_n.$$

4. Seja V um espaço euclidiano de dimensão n. Seja $\{u_1, ..., u_k\}$ um conjunto linearmente independente de k vectores de V. Considere a transformação linear $T : V \to V$ definida por

$$T(v) = \sum_{i=1}^{k} \langle v, u_i \rangle u_i,$$

com $v \in V$.

Mostre que T é invertível se e só se $k = n$.

Dem. Atendendo a que T é invertível se e só se $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$, bastará ver que $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$ se e só se $k = n$.

Se $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$ então teremos $k = n$, caso contrário, isto é, caso $k < n$ ter-se-ia

$$(L(\{u_1, ..., u_k\}))^{\perp} \neq \{\mathbf{0}\}.$$

Assim, para $v \in (L(\{u_1, ..., u_k\}))^{\perp}$, com $v \neq \mathbf{0}$, teríamos $T(v) = \mathbf{0}$, ou seja $\mathcal{N}(T) \neq \{\mathbf{0}\}$. O que não pode ser pois suposemos $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$. Logo, se $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$ então tem-se $k = n$.

Suponhamos agora que se tem $k = n$. Nesse caso, o conjunto $\{u_1, ..., u_n\}$ é uma base de V. Queremos ver que se tem $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$. Seja $v \in V$ tal que $T(v) = \mathbf{0}$. Logo,

$$\sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i \rangle u_i = \mathbf{0}.$$

Assim, atendendo a que o conjunto $\{u_1, ..., u_n\}$ é linearmente independente, tem-se $\langle v, u_i \rangle = 0$, para todo o $i = 1, ..., n$. Finalmente, como o conjunto $\{u_1, ..., u_n\}$ gera V, tem-se $\langle v, u \rangle = 0$, para qualquer $u \in V$. Logo $v = \mathbf{0}$ e assim $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$.

5. Seja V um espaço euclidiano real. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear tal que $\|T(w)\| = \|w\|$ para qualquer $w \in V$. Mostre que

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle,$$

para quaisquer $u, v \in V$.

Dem. Sejam $u, v \in V$. Tem-se

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2}\left(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|T(u + v)\|^2 - \|T(u)\|^2 - \|T(v)\|^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|T(u) + T(v)\|^2 - \|T(u)\|^2 - \|T(v)\|^2\right) = \langle T(u), T(v) \rangle.$$

6. Seja U uma matriz unitária. Isto é:

$$U^H = U^{-1}.$$

Seja λ um valor próprio de U e v um vector próprio associado:

$$Uv = \lambda v.$$

Logo

$$v^H U^H = (Uv)^H = (\lambda v)^H = v^H \overline{\lambda}$$

e assim

$$\left(v^H U^H\right) Uv = \left(v^H \overline{\lambda}\right) Uv \Leftrightarrow v^H \left(U^H U\right) v = v^H \overline{\lambda} (Uv) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v^H I v = v^H \overline{\lambda} \lambda v \Leftrightarrow v^H v = v^H v |\lambda|^2 \Leftrightarrow \left(1 - |\lambda|^2\right) \|v\|^2 = 0 \underset{v \neq \mathbf{0}}{\Leftrightarrow} |\lambda| = 1.$$

7. **Existência**.
$$\mathbb{R}^n = \mathcal{N}(T) \oplus (\mathcal{N}(T))^{\perp}.$$
Se $\mathcal{N}(T) = \mathbb{R}^n$ então $u_0 = \mathbf{0}$.
Se $\mathcal{N}(T) \neq \mathbb{R}^n$ então existe $v_0 \in (\mathcal{N}(T))^{\perp} \setminus \{\mathbf{0}\}$. Seja $u \in \mathbb{R}^n$ arbitrário. Logo
$$T(u)v_0 - T(v_0)u \in \mathcal{N}(T)$$
pois
$$T\left(T(u)v_0 - T(v_0)u\right) = T(u)T(v_0) - T(v_0)T(u) = 0.$$
Deste modo
$$\langle T(u)v_0 - T(v_0)u, v_0\rangle = 0$$
o que é equivalente a
$$T(u) = \langle u, \frac{T(v_0)}{\langle v_0, v_0\rangle}\ v_0\rangle.$$
Assim existe
$$u_0 := \frac{T(v_0)}{\langle v_0, v_0\rangle}\ v_0 \in \mathbb{R}^n$$
tal que
$$T(u) = \langle u, u_0\rangle,$$
para todo o $u \in \mathbb{R}^n$.
Unicidade. Suponhamos que existem $u_0, u_1 \in \mathbb{R}^n$ tais que
$$\langle u, u_0\rangle = T(u) = \langle u, u_1\rangle,$$
para todo o $u \in \mathbb{R}^n$. Assim
$$\langle u, u_0 - u_1\rangle = 0,$$
para todo o $u \in \mathbb{R}^n$, isto é
$$u_0 - u_1 \in (\mathbb{R}^n)^{\perp} = \{\mathbf{0}\},$$
ou seja
$$u_0 = u_1.$$

8. Os casos $k = 0$ ou $k = n$ são triviais, pelo que vamos supôr que $1 \leq k \leq n-1$. Sejam $\{v_1, ...v_k\}$ uma base ortogonal de V e $\{w_1, ..., w_{n-k}\}$ uma base ortogonal de $V^{\perp}$ de modo a que $\mathcal{B} =\{v_1, ...v_k, w_1, ..., w_{n-k}\}$ seja uma base ortogonal ordenada de $\mathbb{R}^n$. A matriz que representa P em relação a $\mathcal{B}$ é a matriz diagonal com as primeiras k entradas da diagonal principal iguais a 1 e as restantes iguais a zero (note que $P(v_i) = v_i$ e $P(w_j) = 0$ para todos os $i \in \{1, ..., k\},\ j \in \{1, ..., n-k\}$). Logo P é diagonalizável e o polinómio característico é dado por:
$$p(\lambda) = (-1)^n(\lambda - 1)^k\lambda^{n-k}.$$

9. Sejam $u \in \mathcal{C}(A)$ e $v \in \mathcal{N}(A)$ quaisquer. Usando o produto interno usual, tem-se

$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^T A)$$

e assim

$$\mathcal{C}(A) = \mathcal{L}(A^T) = \left(\mathcal{N}(A^T)\right)^\perp = \left(\mathcal{N}(AA^T)\right)^\perp = \mathcal{L}(AA^T) = \mathcal{C}\left((AA^T)^T\right) = \mathcal{C}\left(AA^T\right).$$

Logo

$$u = AA^T v'$$

para algum $v' \in \mathbb{R}^n$ e como

$$A^T A v = \mathbf{0}$$

tem-se

$$\langle u, v \rangle = u^T v = \left(AA^T v'\right)^T v = (v')^T AA^T v \underset{AA^T = A^T A}{=} (v')^T A^T A v = (v')^T \mathbf{0} = 0.$$

Assim

$$\mathcal{C}(A) \subseteq (\mathcal{N}(A))^\perp$$

e como

$$\mathbb{R}^n = (\mathcal{N}(A))^\perp \oplus \mathcal{N}(A)$$

e

$$n = \dim \mathcal{C}(A) + \dim \mathcal{N}(A)$$

então

$$\dim \mathcal{C}(A) = \left(\dim (\mathcal{N}(A))^\perp\right).$$

Pelo que

$$\mathcal{C}(A) = (\mathcal{N}(A))^\perp \quad \text{isto é} \quad (\mathcal{C}(A))^\perp = \mathcal{N}(A).$$