Instituto Superior Técnico - Álgebra Linear - 1^o Semestre 2011/2012

LEAN - LEMat - MEAmbi - MEBiol - MEQ

1^a Ficha de exercícios facultativos

1. Sendo A, B, C matrizes de tipos apropriados, mostre que:

   (i) $(AB)\,C = A\,(BC)$ **(ii)** $A\,(B + C) = AB + AC$ **(iii)** $(AB)^T = B^T A^T$

2. Sendo A uma matriz do tipo $m \times n$, mostre que se $A^T A = \mathbf{0}$ então $A = \mathbf{0}$.

3. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, determine todos os $u \neq \mathbf{0}$ tais que $Au = 5u$.

4. Obtenha, por indução, uma fórmula para A^n onde A é dada por:

   (i) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **(iii)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   (iv) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(v)** $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ $(\theta \in \mathbb{R})$

5. Mostre que se $AB = A$ e $BA = B$ então $A^2 = A$ e $B^2 = B$.

6. Sendo A uma matriz 2×2 ortogonal, isto é, tal que $AA^T = A^T A = I$, mostre que

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}, \quad (\theta \in \mathbb{R}).$$

7. Diga de que tipos deverão ser as matrizes A e B de modo a poderem ser efectuados os seguintes produtos e desenvolva esses mesmos produtos.

   (i) $(A + B)(A - B)$ **(ii)** $(AB)^2$ **(iii)** $(A + B)^2$

8. **(i)** Verifique que as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ não satisfazem a relação: $AB = \mathbf{0} \Rightarrow A = \mathbf{0}$ ou $B = \mathbf{0}$. O que pode concluir? E no caso de A ser invertível, o que concluiria acerca da veracidade da relação anterior?

   (ii) Verifique que as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ não satisfazem a relação: $AB = AC \Rightarrow B = C$. O que pode concluir? E no caso de A ser invertível, o que concluiria acerca da veracidade da relação anterior?

9. Sejam A uma matriz do tipo $n \times n$ e B uma matriz do tipo $m \times n$ quaisquer.

   (i) Prove que se A é simétrica (isto é $A = A^T$) então BAB^T tambem é simétrica.

   (ii) Prove que se A é normal (isto é $A^H A = AA^H$) e B é unitária então BAB^H é normal.

   (iii) Prove que $B^T B$ e BB^T são matrizes simétricas e que $B^H B$ e BB^H são matrizes hermitianas.

10. Uma matriz A do tipo $n \times n$ diz-se anti-simétrica se $A^T = -A$. Mostre que:

(i) Os elementos da diagonal principal de uma qualquer matriz anti-simétrica são todos nulos.

(ii) Para qualquer matriz A do tipo $n \times n$, a matriz $A - A^T$ é anti-simétrica.

(iii) Escrevendo $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$, toda a matriz quadrada pode ser decomposta de modo único pela soma de uma matriz simétrica com uma anti-simétrica.

11. Verifique que todas as matrizes $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ que satisfazem a equação $X^2 = I$ são:

$$\pm I, \quad \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{bmatrix}, \quad \pm \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{bmatrix}.$$

Observe assim que a equação matricial $X^2 = I$ tem um número infinito de soluções em contraste com a equação escalar $x^2 = 1$ que tem apenas duas soluções (1 e -1).

12. Mostre que:

$$\{X \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : XA = AX, \text{ para todo o } A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})\} = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Isto é, as matrizes 2×2 que comutam com todas as matrizes 2×2 são múltiplos escalares da matriz I.

13. Sendo A uma matriz do tipo $m \times n$, seja $\mathcal{N}(A) = \{X : AX = \mathbf{0}\}$. Mostre que:

(i) Sendo A e B matrizes de tipos apropriados, então $\mathcal{N}(B) \subset \mathcal{N}(AB)$.

(ii) Sendo $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, tem-se $\mathcal{N}\left(A^T A\right) = \mathcal{N}(A)$.

(iii) Sendo A e B matrizes do tipo $m \times n$ com $m < n$ tais que AB^T é invertível, então $B^T A$ não é invertível. Além disso, nenhuma linha de B pertence a $\mathcal{N}(A)$.

(iv) Sendo $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que para todo o $B \in \mathbb{R}^m$, o sistema $AX = B$ é possível, então $\mathcal{N}\left(A^T\right) = \{\mathbf{0}\}$.

14. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que que $Au = Bu$ para qualquer $u \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Prove que $A = B$.

15. Sejam A, B matrizes não nulas do tipo $n \times 1$. Determine a característica de AB^T. Justifique.

16. Sendo A uma matriz do tipo $m \times n$ tal que $\operatorname{car} A = m$, mostre que existe B do tipo $n \times m$ tal que $AB = I$.

17. Duas matrizes A e B do tipo $n \times n$ dizem-se semelhantes se existir S invertível tal que $A = SBS^{-1}$. Mostre que:

(i) Sendo A ou B invertíveis então AB e BA são semelhantes.

(ii) Sendo A e B semelhantes então $X \in \mathcal{N}(A)$ se e só se $S^{-1}X \in \mathcal{N}(B)$.

18. Seja A uma matriz quadrada (do tipo $n \times n$). Mostre que:

    (i) Se A fôr invertível então A^{-1} tambem é invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$.

    (ii) Se A fôr invertível então A^T tambem é invertível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

    (iii) Se A fôr invertível e simétrica então A^{-1} tambem é simétrica.

19. Sejam A e B matrizes do tipo $n \times n$. Mostre que:

    (i) Se A, B forem invertíveis então $A + B$ não é necessariamente invertível.

    (ii) Se A, B e $A + B$ forem invertíveis então $A^{-1} + B^{-1}$ é invertível e

    $$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B = B(A + B)^{-1}A.$$

    Sugestão: comece por verificar que

    $$I + B^{-1}A = B^{-1}(A + B) \quad \text{e} \quad I + A^{-1}B = A^{-1}(A + B).$$

20. Seja A do tipo $n \times n$ tal que $A^2 = A$ (A diz-se idempotente). Mostre que:

    (i) $I - A$ é idempotente.

    (ii) $2A - I$ é invertível e $(2A - I)^{-1} = 2A - I$. Além disso, se A fôr simétrica então $2A - I$ é uma matriz ortogonal.

    (iii) Se car $A = n$, então $A = I$.

21. Uma matriz B (do tipo $n \times n$) diz-se idempotente se $B^2 = B$. Mostre que

    $$A^2 = I \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(I + A) \text{ é idempotente}$$

22. Sendo $A = (a_{ij})$ uma matriz invertível e $B = (b_{ij})$ a inversa da A, mostre, para $k \neq 0$, a matriz $(k^{i-j}a_{ij})$ é invertível e a sua inversa é $(k^{i-j}b_{ij})$.

23. Seja A uma matriz do tipo 2×2. Mostre que $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é invertível se e só se $ad - bc \neq 0$. No caso de A ser invertível, utilize o método de eliminação de Gauss-Jordan para encontrar a matriz inversa de A.

24. Que condições devem ser verificadas para que a seguinte matriz diagonal do tipo $n \times n$

    $$D = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & k_n \end{bmatrix}$$

    seja invertível? Qual é a sua inversa?

25. Para matrizes quadradas $A = (a_{ij})_{n\times n}$ define-se o **traço** de A, $\mathrm{tr}(A)$, como sendo a soma de todas as entradas da diagonal principal de A, isto é,

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Sejam $A = (a_{ij})_{n\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times n}$ duas matrizes do tipo $n \times n$ e α um escalar. Mostre que

(i)
$$\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B),$$

(ii)
$$\mathrm{tr}(\alpha A) = \alpha\,\mathrm{tr}(A),$$

(iii)
$$\mathrm{tr}(A^T) = \mathrm{tr}(A),$$

(iv)
$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$$

Esta última igualdade continua a ser verdadeira se $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times m}$.

26. Para cada matriz A do tipo $n \times n$, verifique que não existe X do tipo $n \times n$ tal que

$$AX - XA = I.$$

27. Sejam A e B matrizes do tipo $n \times n$ tais que A é simétrica e B é anti-simétrica. Mostre que

$$\mathrm{tr}(AB) = 0.$$

28. Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Mostre que

$$\mathrm{tr}(A^T A) = 0 \Leftrightarrow A = \mathbf{0}.$$

29. Sejam $u, v \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ tais que $u^T v \neq -1$. Seja

$$A = I + uv^T.$$

Verifique que A é invertível e que

$$A^{-1} = I - \frac{1}{1+u^T v} uv^T.$$

Além disso verifique que

$$u^T v = \left[\mathrm{tr}\left(uv^T\right)\right]$$