Instituto Superior Técnico - Álgebra Linear - 1^o Semestre 2011/2012

LEAN - LEMat - MEAmbi - MEBiol - MEQ

2^a Ficha de exercícios facultativos

1. Seja V um espaço linear real e $\mathbf{0}$ o seu vector nulo. Mostre que:

   (i) Se $u + v = u + w$, então $v = w$. **(ii)** $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$ para todo o escalar $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (iii) $0u = \mathbf{0}$ para todo o vector $u \in \mathbf{V}$. **(iv)** $-(-u) = u$ para todo o $u \in \mathbf{V}$.

   (v) Mostre que o vector nulo $\mathbf{0} \in V$ é único.

   (vi) Mostre que o simétrico $-u$ de um qualquer vector u de V é único.

   (vii) $(-1)u = -u$ para todo o $u \in \mathbf{V}$. **(viii)** Se $\lambda u = \mathbf{0}$, então $\lambda = 0$ ou $u = \mathbf{0}$.

   (ix) Se $u \neq \mathbf{0}$ e $\alpha u = \beta u$, então $\alpha = \beta$.

2. Verifique que o conjunto de todos os polinómios reais de grau igual a n:

$$\{a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \in P_n : a_n \neq 0\},$$

   munido das operações usuais, não é um espaço linear.

3. **(i)** Mostre que P_2 é um subespaço de P_3. **(ii)** Mostre que P_n é um subespaço de P_{n+1}.

   (iii) Seja P o espaço linear de todos os polinómios reais (de qualquer grau). Mostre que P_n é um subespaço de P.

4. Quais dos seguintes subconjuntos de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, com as operações usuais, são subespaços?

   (i) O conjunto de todas as matrizes simétricas do tipo $n \times n$.

   (ii) O conjunto de todas as matrizes invertíveis do tipo $n \times n$.

   (iii) O conjunto de todas as matrizes diagonais do tipo $n \times n$.

   (iv) O conjunto de todas as matrizes singulares do tipo $n \times n$.

   (v) O conjunto de todas as matrizes triangulares superiores do tipo $n \times n$.

5. Seja V o espaço linear de todas as funções reais de variável real. Quais dos seguintes subconjuntos de V, com as operações usuais, são subespaços?

   (i) O conjunto de todas as funções limitadas.

   (ii) O conjunto de todas as funções pares, isto é, tais que $f(x) = f(-x)$.

   (iii) O conjunto de todas as funções racionais, isto é, as que são quocientes de funções polinomiais.

   (iv) O conjunto de todas as funções crescentes.

   (v) O conjunto de todas as funções f tais que $f(0) = f(1)$.

   (vi) O conjunto de todas as funções f tais que $f(0) = 1 + f(1)$.

6. Seja $\{v_1, v_2, v_3\}$ uma base de um espaço linear V. Prove que $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 + v_3\}$ é também uma base de V.

7. Seja A uma matriz (real) invertível do tipo $n \times n$. Prove que, se $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$, então $\{Av_1, Av_2, \ldots, Av_n\}$ é também uma base de $\mathbb{R}^n$.

8. Sejam V um espaço linear e $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Prove que o conjunto S é uma base de V se e só se todo o vector de V se escrever de maneira única como combinação linear dos elementos de S.

9. Seja $\{v_1, v_2\}$ uma base de um espaço linear U. Considere os vectores $w_1 = av_1 + bv_2$ e $w_2 = cv_1 + dv_2$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Prove que $\{w_1, w_2\}$ é também uma base de U se e só se $ad \neq bc$.

10. Sejam A uma matriz $m \times n$ e B uma matriz $n \times p$. Mostre que

$$\dim \mathcal{C}\,(AB) = \dim \mathcal{C}\,(B) - \dim\left(\mathcal{N}\,(A) \cap \mathcal{C}\,(B)\right).$$

Sugestão: Considere (no caso em que $\mathcal{N}\,(A) \cap \mathcal{C}\,(B) \neq \{\mathbf{0}\}$) uma base $\{x_1, \ldots, x_s\}$ para $\mathcal{N}\,(A) \cap \mathcal{C}\,(B)$ e suponha (no caso em que $AB \neq \mathbf{0}$) que $\{x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_t\}$ é uma base para $\mathcal{C}\,(B)$. Mostre que $\{Ay_1, \ldots, Ay_t\}$ é uma base para $\mathcal{C}\,(AB)$.

11. Considere os seguintes r vectores de $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{x^1} = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}), \mathbf{x^2} = (x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}), \ldots, \mathbf{x^r} = (x_{r1}, x_{r2}, \ldots, x_{rn}).$$

Mostre que se $|x_{jj}| > \sum\limits_{i=1 (i\neq j)}^{r} |x_{ij}|$ para todo o $j = 1, \ldots, r$ então o conjunto

$$\left\{\mathbf{x^1}, \mathbf{x^2}, \ldots, \mathbf{x^r}\right\}$$

é linearmente independente.

Sugestão: Considere

$$\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) = \alpha_1 \mathbf{x^1} + \alpha_2 \mathbf{x^2} + \cdots + \alpha_r \mathbf{x^r},$$

com $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ e mostre que se existir $\alpha_j \neq 0$ (com $j \in \{1, \ldots, r\}$) tal que

$$|\alpha_j| \geqslant |\alpha_i|,$$

para todo o $i = 1, \ldots, r$, então $v_j \neq 0$.

12. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Mostre que $\mathcal{C}\,(A + B) \subset \mathcal{C}\,(A) + \mathcal{C}\,(B)$.

13. Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Mostre que $\mathcal{N}\,(A) \cap \mathcal{L}\,(A) = \{\mathbf{0}\}$.

14. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^2 = A$. Mostre que $\mathcal{N}\,(A) \cap \mathcal{C}\,(A) = \{\mathbf{0}\}$.

15. Seja $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $A^2 = \mathbf{0}$. Mostre que $\operatorname{car} A = 1$.

16. Sejam B e C matrizes $m \times n$. Mostre que

$$|\operatorname{car} B - \operatorname{car} C| \leq \operatorname{car}(B - C).$$

17. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^3 \neq \mathbf{0}$ e $A^4 = \mathbf{0}$. Seja $v \notin \mathcal{N}(A^3)$. Prove que o conjunto

$$\left\{v, Av, A^2v, A^3v\right\}$$

é linearmente independente.

18. Seja A uma matriz real do tipo 5×6. Diga, justificando, se A^TA é invertível.