Instituto Superior Técnico - Álgebra Linear - 1^o Semestre 2011/2012

LEAN - LEMat - MEAmbi - MEBiol - MEQ

3^a Ficha de exercícios facultativos

1. Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear invertível. Seja u um vector próprio de T associado a um valor próprio λ de T. Verifique que u é também um vector próprio de T^{-1} e determine o valor próprio de T^{-1} que lhe está associado.

2. Seja V um espaço linear. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear. Seja u um vector próprio de T associado a um valor próprio λ de T. Verifique que u é também um vector próprio de T^2 associado ao valor próprio λ^2 de T^2.

3. Seja A uma matriz do tipo $n \times n$. Mostre que se λ é um valor próprio de A então λ^k é um valor próprio de A^k, onde k é um inteiro positivo.

4. Uma matriz A do tipo $n \times n$ diz-se nilpotente se $A^l = 0$ para algum inteiro positivo l. Mostre que se A é nilpotente então o único valor próprio de A é 0.

5. Seja A uma matriz $n \times n$. Verifique que A e A^T têm os mesmos valores próprios.

6. Seja A uma matriz $n \times n$ cuja soma das suas colunas é constante e igual a r. Mostre que r é um valor próprio de A.

7. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Seja P uma matriz diagonalizante para A. Determine uma matriz diagonalizante para A^T em termos de P.

8. Seja Q uma matriz $n \times n$ real ortogonal, isto é, tal que $Q^{-1} = Q^T$.

   Mostre que se n fôr ímpar então Q tem o valor próprio 1 ou tem o valor próprio -1.

9. Determine uma matriz A real 2×2 tal que $\det A < 0$. Mostre que A é diagonalizável.

10. Seja A uma matriz $n \times n$ e seja λ um valor próprio de A com multiplicidade algébrica igual a n. Mostre que se A fôr diagonalizável então A é uma matriz diagonal.

11. Seja V um espaço linear e seja $T : V \to V$ uma transformação linear tal que todos os vectores não nulos de V são vectores próprios. Mostre que T tem um único valor próprio.

12. Sejam A e B duas matrizes do tipo $n \times n$. Mostre que AB e BA têm os mesmos valores próprios.

13. Sejam A e B duas matrizes tais que $AB = BA$. Mostre que A e B têm um vector próprio em comum.

    Sugestão: Sendo λ um valor próprio de A, considere C a matriz cujas colunas formam uma base ordenada $\mathcal{S}$ de $\mathcal{N}(A - \lambda I)$ e verifique que $(A - \lambda I) BC = \mathbf{0}$. Finalmente considere a matriz P cujas colunas são respectivamente as coordenadas das colunas de BC em relação à base $\mathcal{S}$ e sendo v um vector próprio de P mostre que Cv é um vector próprio comum a A e B.

14. Seja A uma matriz $n \times n$ e sejam λ_1, λ_2 escalares, com $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tais que

$$(A - \lambda_1 I)\,(A - \lambda_2 I) = \mathbf{0}.$$

Mostre que A é diagonalizável.

15. Seja A matriz real $n \times n$ nilpotente, isto é, existe um natural k tal que $A^k \neq \mathbf{0}$ e $A^{k+1} = \mathbf{0}$. Prove que A não é diagonalizável.