Instituto Superior Técnico - Álgebra Linear - 1^o Semestre 2011/2012

LEAN - LEMat - MEAmbi - MEBiol - MEQ

4^a Ficha de exercícios facultativos

1. Seja V um espaço euclidiano real. Verifique que para todos os $u, v, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ se tem:

   (i) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

   (ii) $\langle \lambda u, v \rangle = \langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$

   (iii) $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$

   (iv) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

   (v) $\langle u + w, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle + \langle w, v \rangle + \|w\|^2$

   (vi) $\langle u, \mathbf{0} \rangle = \langle \mathbf{0}, u \rangle = 0$

   (vii) $\langle u, v \rangle = 0$ se e só se $\|u + v\| = \|u - v\|$.

   (viii) $\langle u, v \rangle = 0$ se e só se $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

   (ix) $\langle u, v \rangle = 0$ se e só se $\|u + cv\| \geq \|u\|$ para todo o real c.

   (x) $\langle u + v, u - v \rangle = 0$ se e só se $\|u\| = \|v\|$.

   (xi) Lei do paralelogramo $\|u - v\|^2 + \|u + v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$.

2. Seja V um espaço euclidiano real.

   (i) Seja $u \in V$. Verifique que se $\langle u, v \rangle = 0$ para qualquer $v \in V$ então $u = \mathbf{0}$.

   (ii) Sejam $u, v \in V$. Verifique que $u = v$ se e só se $\langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle$ para qualquer $w \in V$.

3. Seja V um espaço euclidiano com $\dim V = n$. Seja $\mathcal{S} = \{u_1, ..., u_n\}$ uma base ortonormada de V. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear. Verifique que a matriz $A = (a_{ij})$ que representa T em relação à base $\mathcal{S}$ é dada por

$$A = (a_{ij}) = (\langle T(u_j), u_i \rangle).$$

4. Seja V um espaço euclidiano de dimensão n. Seja $\{u_1, ..., u_k\}$ um conjunto linearmente independente de k vectores de V. Considere a transformação linear $T : V \to V$ definida por

$$T(v) = \sum_{i=1}^{k} \langle v, u_i \rangle u_i,$$

   com $v \in V$.

   Mostre que T é invertível se e só se $k = n$.

5. Seja V um espaço euclidiano real. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear tal que

$$\|T(w)\| = \|w\|$$

para qualquer $w \in V$. Mostre que

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle \,,$$

para quaisquer $u, v \in V$.

6. Seja U uma matriz unitária. Mostre que os valores próprios de U têm módulo 1.

7. Considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma transformação linear. Mostre que existe um e um só $u_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$T(u) = \langle u, u_0 \rangle,$$

para todo o $u \in \mathbb{R}^n$.

8. Seja $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a projecção ortogonal sobre um subespaço V de $\mathbb{R}^n$ de dimensão k. Determine o polinómio característico de P e prove que P é diagonalizável.

9. Considere o espaço linear $\mathbb{R}^n$ munido com o produto interno usual. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que

$$A^T A = A A^T.$$

Prove que o complemento ortogonal do espaço das colunas de A é igual ao núcleo de A, isto é

$$(\mathcal{C}(A))^\perp = \mathcal{N}(A).$$