Instituto Superior Técnico - Álgebra Linear - 1^o Semestre 2012/2013

LEAN - LEMat - MEQ

10^a Ficha de exercícios para as aulas de problemas: 4 Dez. - 18 Dez.

1. Seja
$$A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$
Verifique se 0 é valor próprio de A e caso seja determine um vector próprio associado.

2. Sem calcular o polinómio característico, indique um valor próprio e dois vectores próprios associados linearmente independentes para a matriz
$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

3. Determine os valores próprios de uma matriz A 2×2 cujo traço seja igual a 5 e cujo determinante seja igual a 6.

4. Determine uma matriz A real simétrica ($A^T = A$) 2×2 cujos valores próprios sejam -2 e 2 e tal que $(2, 1)$ seja um vector próprio associado ao valor próprio 2.

5. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que admite os vectores próprios
$$v_1 = (1, 2, 1), \quad v_2 = (-1, 0, 1), \quad v_3 = (0, 1, 0),$$
associados respectivamente aos valores próprios $1, 2$ e 3.

   Determine a expressão geral de T.

6. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por
$$T(x, y, z) = (0, y + 3z, 3y + z).$$

   (i) Diga quais dos seguintes vectores:
$$v_1 = (2, 1, 1), \quad v_2 = (0, -1, 1), \quad v_3 = (1, 0, 0), \quad v_4 = (-1, 1, 3), \quad v_5 = (0, 3, 3)$$
   são vectores próprios.

   (ii) Determine os valores próprios de T.

   (iii) Diga, justificando, se T é invertível e se T é diagonalizável.

   (iv) Determine os subespaços próprios de T.

7. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(1,2) = (5,5) = T\,(2,1)\,.$$

(i) Verifique que os vectores $v_1 = (1,-1)$ e $v_2 = (1,1)$ são vectores próprios de T.

(ii) Diga, justificando, se T é invertível e se T é diagonalizável.

(iii) Indique uma base ordenada de $\mathbb{R}^2$ relativamente à qual a matriz que representa T seja uma matriz diagonal.

(iv) Determine os valores próprios e os subespaços próprios de T.

8. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ é representada pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(i) Verifique que os vectores $v_1 = (1,0,0), v_2 = (1,1,1)$ e $v_3 = (0,0,1)$ são vectores próprios de T.

(ii) Diga, justificando, se T é invertível e se T é diagonalizável.

(iii) Determine os valores próprios e os subespaços próprios de T.

(iv) Diagonalize T. Isto é, determine uma matriz de mudança de base P^{-1} e uma matriz diagonal D tais que

$$D = PAP^{-1}.$$

9. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que em relação à base ordenada $\{(1,2)\,,(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ é representada pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

(i) Determine os valores próprios de T e diga, justificando, se T é invertível e se T é diagonalizável.

(ii) Determine bases para os subespaços próprios de T.

(iii) Diagonalize a transformação linear T, isto é, determine uma base ordenada de $\mathbb{R}^2$ relativamente à qual a matriz que represente T seja uma matriz diagonal.

10. Seja V um espaço linear de dimensão finita. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear tal que $T^2 = T$. Uma tranformação linear nas condições anteriores chama-se **projecção**.

(i) Mostre que os valores próprios de T são 0 e 1.

(ii) Justifique que T é diagonalizável.

11. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (x, y, -x - y)\,.$$

(i) Determine os valores próprios e os subespaços próprios de T.

(ii) A transformação linear T representa geometricamente uma projecção sobre um plano, paralelamente a um vector. Determine esse plano e esse vector.

12. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que representa geometricamente a projecção sobre o plano $x + y + z = 0$, paralelamente ao vector $(0, 0, 1)$.

(i) Explique o significado do plano e do vector referidos no enunciado.

(ii) Determine a expressão geral de T.

13. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2$ é representada pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(i) Determine os valores próprios e os subespaços próprios de T.

(ii) Mostre que não existe nenhuma base de $\mathbb{R}^2$ constituída por vectores próprios de T. T é diagonalizável?

14. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (3x, 2y + z, 2z).$$

(i) Determine os valores próprios e bases dos subespaços próprios de T.

(ii) Mostre que não existe nenhuma base de $\mathbb{R}^3$ em relação à qual T possa ser representada por uma matriz diagonal.

15. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (y + z, 2y + z, y + 2z).$$

(i) Determine o polinómio característico de T.

(ii) Determine os valores próprios e bases dos subespaços próprios de T.

(iii) Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída por vectores próprios de T. Determine a matriz que representa T nesta base ordenada.

(iv) Seja A a matriz que representa T na base canónica de $\mathbb{R}^3$, isto é, $A = M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)$. Diagonalize a matriz A. Isto é, determine uma matriz de mudança de base P^{-1} e uma matriz diagonal D tais que $D = PAP^{-1}$.

(v) Determine A^n e $T^n(x, y, z)$.

16. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que em relação à base ordenada $\{(0,1,0), (1,0,-1), (1,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ é representada pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 10 \end{bmatrix}.$$

(i) Determine o polinómio característico de T.

(ii) Determine os valores próprios e bases dos subespaços próprios de T.

(iii) Diagonalize a transformação linear T, isto é, determine uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$ relativamente à qual a matriz que represente T seja uma matriz diagonal.

(iv) Determine A^n e $T^n(x,y,z)$.

17. Sabendo que os vectores $(1,1,1), (1,0,-1)$ e $(1,-1,0)$ são vectores próprios da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix},$$

determine a, b, c, d, e, f.

18. Considere a transformação linear $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por

$$T(A) = A + A^T.$$

(i) Escolha uma base ordenada para $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e determine a matriz que representa T em relação a essa base ordenada.

(ii) Determine os valores próprios e os vectores próprios de T.

(iii) Diga se T pode ou não ser representada por uma matriz diagonal em relação a uma base ordenada apropriada de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Em caso afirmativo, indique uma tal base ordenada e a correspondente matriz diagonal que representa T.

19. Considere as matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Verifique que A_1, A_2 e A_3 são diagonalizáveis. Isto é, determine matrizes de mudança de bases P_1^{-1}, P_2^{-1} e P_3^{-1} e matrizes diagonais D_1, D_2 e D_3 tais que

$$D_1 = P_1 A_1 P_1^{-1}, \quad D_2 = P_2 A_2 P_2^{-1} \quad \text{e} \quad D_3 = P_3 A_3 P_3^{-1}.$$

Ou seja, verifique que existe uma base de $\mathbb{R}^2$ formada por vectores próprios de A_1, uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores próprios de A_2 e outra base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores próprios de A_3.

20. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ que em relação à base canónica de $\mathbb{R}^4$ é representada pela matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{bmatrix},$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$. Determine os valores de a, b, c de modo a que exista uma base de $\mathbb{R}^4$ constituída só por vectores próprios de T.

21. Para cada parâmetro $\alpha \in \mathbb{R}$, sejam

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \ u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(i) Prove que u_1 e u_2 são vectores próprios de A. Determine os valores próprios associados.

(ii) Determine os valores próprios de A e indique os valores de α para os quais A tem 3 valores próprios todos distintos.

(iii) Determine, em função de α, bases para os espaços próprios associados.

(iv) Identifique, justificando, os valores de α para os quais a matriz A é diagonalizável.

22. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (x + 2z, y, 2x + z).$$

a) Determine os valores próprios de T e diga, justificando, se T é invertível e se T é diagonalizável.

b) Diga se T pode ou não ser representada por uma matriz diagonal em relação a uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$. Em caso afirmativo, determine uma tal base ordenada e indique a correspondente matriz diagonal que representa T.

23. Considere matriz dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considere a base ordenada $B = \{(1,0,0),(1,1,0)),(1,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que

$$A = M(T; B; B).$$

a) Determine os valores próprios da matriz A.

b) Encontre uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores próprios de A.

c) Verifique se o vector $(1, 0, -1)$ é vector próprio da matriz A ou da transformação linear T.

d) Resolva, em $\mathbb{R}^3$, a equação linear $T(x, y, z) = (2, 1, 1)$.

24. Considere o espaço linear $\mathbb{R}^3$ munido com o produto interno usual. Para cada α real, considere a matriz dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & \alpha \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Prove que $(4, 1+\alpha, -4)$ é um vector próprio de A e diga qual é o valor próprio associado.

b) Determine os valores próprios de A e as respectivas multiplicidades algébricas.

c) Determine uma base para cada espaço próprio de A e identifique os valores de α para os quais A é diagonalizável.

d) Determine, se existirem, os valores de α para os quais é possível encontrar uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ constituída só por vectores próprios de A. Justifique.

25. Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_1$ definida por

$$M\left(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

onde $\mathcal{B}_c^2 = \{1, t\}$ e $\mathcal{B} = \{1+t, 1-t\}$ são duas bases ordenadas de $\mathcal{P}_1$. Determine os valores próprios de T.

26. Seja $\mathcal{P}_1 = \{p(t) = a_0 + a_1 t : a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$ o espaço linear real dos polinómios reais de grau menor ou igual a 1. Considere ainda a transformação linear $T : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_1$ tal que

$$T(2-2t) = 6-2t \qquad T(-1+2t) = 6t \qquad T(1+t) = 9+9t.$$

a) Determine os valores próprios de T.

b) Determine uma base de $\mathcal{P}_1$ formada por vectores próprios de T.

27. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Determine os valores próprios de A e diga, justificando, se A é invertível.

b) Determine, caso exista, uma base para $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A.

28. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule as dimensões dos espaços próprios de A sem os determinar.

29. Considere o espaço linear $\mathbb{R}^3$ munido com o produto interno usual. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Diga, justificando, se é possível encontrar uma base ortogonal para $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A. Caso seja possível, determine essa base.

30. Considere o espaço linear $\mathbb{R}^3$ munido com o produto interno usual. Seja

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Diga, justificando, se é possível encontrar uma base ortogonal para $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A. Caso seja possível, determine essa base. Isto é, diga se é possível encontrar uma matriz ortogonal P^T que diagonalize ortogonalmente A e indique nessa caso, a correspondente matriz diagonal semelhante a A.

31. Considere o espaço linear $\mathbb{R}^3$ munido com o produto interno usual. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determine três raízes quadradas de A, isto é, determine três matrizes B tais que

$$A = B^2.$$

Diga qual é a única raíz quadrada definida positiva B.

32. Considere o espaço linear $\mathbb{R}^3$ munido com o produto interno usual. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que $(1,1,1)$ é um vector próprio de A e diga qual é o valor próprio associado.

b) Sendo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear representada matricialmente por A relativamente à base canónica ordenada $B_c^3 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ (isto é, $A = M(T; B_c^3; B_c^3)$), determine

$$T(-1,1,0) \qquad \text{e} \qquad T(-1,0,1).$$

c) Determine uma base ortogonal para $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A.

d) Determine a única matriz B definida positiva (isto é, cujos valores próprios sejam todos positivos) tal que

$$A = B^2.$$

33. Considere o produto interno usual. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}.$$

(i) Mostre que A é normal.

(ii) Diga, justificando, se A é hermitiana.

(iii) Encontre uma matriz unitária U^H que diagonalize unitariamente A e indique a correspondente matriz diagonal semelhante a A.

34. Considere o produto interno usual. Justifique a seguinte afirmação. A matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

não é ortogonalmente diagonalizável (não existe P^T ortogonal tal que

$$D = PAP^T$$

é diagonal), no entanto, é unitariamente diagonalizável (existe U^H unitária tal que

$$D = UAU^H$$

é diagonal).

35. Considere o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} u_1' = -2u_3 \\ u_2' = u_1 + 2u_2 + u_3 \\ u_3' = u_1 + 3u_3 \end{cases}$$

(i) Resolva-o, determinando a respectiva solução geral.

(ii) Determine a única solução

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix}$$

tal que

$$\begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \\ u_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

36. Considere o produto interno usual. Classifique e diagonalize a seguinte forma quadrática.

$$Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},$$

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 3x_3^2.$$