Instituto Superior Técnico - Álgebra Linear - 1^o Semestre 2012/2013

LEAN - LEMat - MEQ

4^a Ficha de exercícios para as aulas de problemas: 16 Out. - 19 Out.

1. Determine as condições que os parametros $\alpha_i, \beta_i (i = 1, 2)$ devem verificar para que os vectores $(\alpha_1, \beta_1, 3)$ e $(\alpha_2, \beta_2, 9)$, no espaço linear $\mathbb{R}^3$, sejam linearmente independentes.

2. Diga se os seguintes conjuntos de vectores em $\mathbb{R}^3$ são linearmente dependentes ou linearmente independentes? Nos casos em que sejam linearmente dependentes, indique (para cada um) um subconjunto linearmente independente com o maior n^o possível de elementos e escreva os restantes como combinação linear desses vectores.

   (i) $\{(4, 2, 1), (2, 6, -5), (1, -2, 3)\}$

   (ii) $\{(1, 2, -1), (3, 2, 5)\}$

   (iii) $\{(1, 2, 3), (1, 1, 1), (1, 0, 1)\}$

   (iv) $\{(1, 0, -1), (0, 0, 0), (0, 1, 1)\}$

   (v) $\{(1, 1, 0), (0, 2, 3), (1, 2, 3), (x, y, z)\}$ (com $x, y, z \in \mathbb{R}$).

3. Determine todos os valores de a para os quais $\{(a^2, 0, 1), (0, a, 2), (1, 0, 1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

4. Sejam $U = L(\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0)\})$ e $V_k = L(\{(2, k, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\})$ subespaços de $\mathbb{R}^4$. Determine os valores de k para os quais $\dim(U \cap V_k) = 1$.

5. No espaço linear $\mathbb{R}^3$, construa uma base que inclua os vectores:

   (i) $(1, 0, 2)$ e $(0, 1, 2)$. **(ii)** $(2, -1, 1)$ e $(-4, 2, 1)$. **(iii)** $(-1, 2, 1)$ e $(1, 0, -1)$.

6. Verifique que os seguintes subconjuntos do espaço linear de todas as funções reais de variável real são linearmente dependentes. Indique (para cada um) um subconjunto linearmente independente com o maior n^o possível de elementos e escreva os restantes como combinação linear desses vectores.

   (i) $S = \{\cos^2 t, \operatorname{sen}^2 t, \cos 2t\}$

   (ii) $S = \{2, \operatorname{sen}^2 t, \cos^2 t\}$

   (iii) $S = \{e^t, e^{-t}, \cosh t\}$

   (iv) $S = \left\{1, t, t^2, (t+1)^2\right\}$

   Determine uma base para cada subespaço $L(S)$ e calcule a respectiva dimensão.

7. Seja V o espaço linear de todas as funções reais de variável real. Sejam $f, g, h \in V$, com $f(t) = \operatorname{sen} t$, $g(t) = \cos t$ e $h(t) = t$. Mostre que o conjunto $\{f, g, h\}$ é linearmente independente.

8. Diga quais dos seguintes conjuntos de vectores são bases de $\mathbb{R}^2$. Caso não sejam bases, determine subconjuntos desses conjuntos que sejam bases e as dimensões dos espaços gerados por cada um desses subconjuntos. Em cada base de $\mathbb{R}^2$ encontrada, determine

as coordenadas do vector $(0, -1)$ em cada base ordenada encontrada. Relativamente a cada base ordenada de $\mathbb{R}^2$, determine ainda o vector cujas coordenadas são $(0, -1)$.

(i) $\{(1, 3), (1, -1)\}$ **(ii)** $\{(0, 0), (1, 2)\}$ **(iii)** $\{(2, 4)\}$

(iv) $\{(-5, 0), (0, 2)\}$ **(v)** $\{(1, 2), (2, -3), (3, 2)\}$ **(vi)** $\{(1, 0), (0, 1)\}$

9. Diga quais dos seguintes conjuntos de vectores são bases de $\mathbb{R}^3$. Caso não sejam bases, determine subconjuntos desses conjuntos que sejam bases e as dimensões dos espaços gerados por cada um desses subconjuntos. Em cada base de $\mathbb{R}^3$ encontrada, determine as coordenadas do vector $(-1, 1, -2)$ em cada base ordenada encontrada. Relativamente a cada base ordenada de $\mathbb{R}^3$, determine ainda o vector cujas coordenadas são $(-1, 1, -2)$.

   (i) $\{(1, 2, 3), (0, 0, 0), (0, 1, 2)\}$ **(ii)** $\{(1, 2, 0), (0, 1, -1)\}$

   (iii) $\{(3, 2, 2), (-1, 2, 1), (0, 1, 0)\}$ **(iv)** $\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$

   (v) $\{(1, 1, -1), (2, 3, 4), (4, 1, -1), (0, 1, -1)\}$ **(vi)** $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

10. Diga quais dos seguintes conjuntos de vectores são bases de $\mathbb{R}^4$. Caso não sejam bases, determine subconjuntos desses conjuntos que sejam bases e as dimensões dos espaços gerados por cada um desses subconjuntos. Em cada alínea indique uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclua pelo menos dois vectores do conjunto apresentado.

    (i) $\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1)\}$

    (ii) $\{(1, -1, 0, 2), (3, -1, 2, 1), (1, 0, 0, 1)\}$

    (iii) $S = \{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\}$

    (iv) $\{(1, 0, 0, 2), (1, 0, 2, 0), (1, 2, 0, 0), (3, 0, 0, 0)\}$

    (v) $\{(1, -2, 5, -3), (2, -4, 6, 2), (3, -6, 11, -1), (0, 0, 5, 5)\}$

    (vi) $S = \{(2, 1, -1, 2), (-1, -1, 1, 2), (4, -2, 2, -2), (5, -2, 2, 2)\}$. Nesta alínea, verifique que $(8, -3, 3, 5) \in L(S)$ e determine uma base de $L(S)$ que inclua o vector $(8, -3, 3, 5)$.

11. Determine as coordenadas de $p(t) = t$ na base ordenada $\{2 - t, 2 + t\}$ de $\mathcal{P}_1$. ($\mathcal{P}_1$ é o espaço linear dos polinómios reais de grau menor ou igual a 1.)

12. Diga quais dos seguintes conjuntos de vectores são bases de $\mathcal{P}_2$ (espaço linear dos polinómios reais de grau menor ou igual a 2). Caso não sejam bases, determine subconjuntos desses conjuntos que sejam bases e as dimensões dos espaços gerados por cada um desses subconjuntos. Determine as coordenadas do vector $1 - t$ em cada base ordenada de $\mathcal{P}_2$ encontrada. Relativamente a cada base ordenada de $\mathcal{P}_2$, determine ainda o vector cujas coordenadas são $(-1, 3, 2)$.

    (i) $\{2 + t - t^2, 2t + 2t^2, -t^2\}$ **(ii)** $\{2t - t^2, 1 - 2t^2, 2 + t, 1 - 4t\}$

    (iii) $\{1 + t^2, t - t^2, 1 - t + 2t^2, 1 + t\}$ **(iv)** $\{-1 + 2t + t^2, 2 - t\}$

    (v) $\{1 + 2t - t^2, 3 + t^2, 5 + 4t - t^2, -2 + 2t - t^2\}$ **(vi)** $\{1, t, t^2\}$

13. Verifique que os seguintes subconjuntos de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ são subespaços de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ relativamente às operações usuais e determine uma base para cada um deles indicando as respectivas dimensões.

(i) $\{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \operatorname{tr} A = 0\}$ **(ii)** $\left\{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} A\right\}$

14. Escreva a matriz $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ como combinação linear das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Encontre uma matriz 2×2 que não pertença a

$$L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

Antes de a determinar, explique porque é que essa matriz existe.

15. Mostre que as matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ formam uma base para o espaço linear $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

16. Seja $S = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 11 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\right\}$. Seja W um subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ gerado por S. Determine uma base para W que inclua vectores de S.

17. Determine uma base para $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$. Qual é a dimensão do espaço linear $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$?

18. Determine uma base para cada um dos seguintes subespaços de $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e calcule a respectiva dimensão:

(i) O conjunto de todas as matrizes (reais) diagonais do tipo 3×3.

(ii) O conjunto de todas as matrizes (reais) simétricas do tipo 3×3.

19. Determine as dimensões e indique bases para: o núcleo, o espaço das linhas e o espaço das colunas das seguintes matrizes.

(i) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ **(iii)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(iv)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(vi)** $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **(vii)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Determine tambem a característica e a nulidade de cada uma delas.

20. Quais são as matrizes do tipo 3×3 cujo núcleo tem dimensão 3?

21. Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{C}(A) = \mathcal{N}(A)$. Prove que $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ com n par. Dê um exemplo para $n = 4$.

22. Sejam U e V subespaços de W tais que $\dim U = 4, \dim V = 5$ e $\dim W = 7$. Diga quais as dimensões possíveis para $U \cap V$.

23. Determine bases e calcule as dimensões de $U+V$ e $U\cap V$, dizendo em que casos $U+V$ é a soma directa $U \oplus V$ (determine-a) dos subespaços U e V.

(i) $U = L\left(\{(1,-1,1),(0,1,1)\}\right), \ V = L\left(\{(1,1,2),(-1,1,1)\}\right)$ em $\mathbb{R}^3$.

(ii) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-z=0 \ \text{ e } \ x+y=0\}, \ \ V = L\left(\{(1,1,1)\}\right)$ em $\mathbb{R}^3$.

(iii) $U = L\left(\{(1,0,1),(-1,1,2)\}\right), \ V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+3z=0\}$ em $\mathbb{R}^3$.

(iv) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=y=z\}, \ V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=0\}$ em $\mathbb{R}^3$.

(v) $U = L\left(\{1+t, 1-t^2\}\right), \quad V = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 - a_1 + a_0 = 0\}$ em $\mathcal{P}_2$.

(vi) $U = \{p(t) \in \mathcal{P}_2 : \ p(-1) = 2p(0) - p(1)\}, \quad V = L(\{-1+t, 1-t^2\})$ em $\mathcal{P}_2$.

(vii) $U = \{p(t) \in \mathcal{P}_2 : \ p(1) = 0\}, \quad V = L(\{1-t, t-t^2, -1+t^2\})$ em $\mathcal{P}_2$.

(viii) $U = L\left(\{1+t, 1-t^3\}\right), \quad V = L\left(\{1+t+t^2, t-t^3, 1+t+t^3\}\right)$ em $\mathcal{P}_3$.

(ix) $U = L\left(\{(2,-2,1,-2),(-1,1,1,3),(0,0,-6,-8),(-1,1,-5,-5)\}\right)$,
$V = L\left(\{(0,0,0,-1),(0,1,2,3),(0,2,4,8)\}\right)$ em $\mathbb{R}^4$.

(x) $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+2y+3z=0 \ \text{ e } y+2z+3w=0\}$,
$V = L\left(\{(2,5,-4,1),(0,9,-6,1),(-4,-1,2,-1)\}\right)$ em $\mathbb{R}^4$.

Neste alínea **(viii)** mostre que $U = V$.

(xi) Seja U o subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado por

$$\{(1,-1,-1,-2,0),(1,-2,-2,0,-3),(1,-1,-2,-2,1)\}.$$

Seja V o subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado por

$$\{(1,-2,-3,0,-2),(1,-1,-3,2,-4),(1,-1,-2,2,-5)\}.$$

Comece por escrever U e V como soluções de sistemas de equações lineares homogéneas.

(xii) Sejam U e V subespaços de $\mathbb{R}^4$ gerados respectivamente por F e por G, com

$$\begin{aligned} F &= \{(1,0,-1,0),(0,1,1,1),(1,0,0,-2),(0,0,-1,2)\}, \\ G &= \{(1,1,1,1),(1,2,0,-1),(0,0,1,1)\}. \end{aligned}$$

24. Seja $\mathcal{P}_2 = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ o espaço linear real dos polinómios reais de grau menor ou igual a 2. Seja $U = \{p(t) \in \mathcal{P}_2 : p(-1) + p(1) = 0\}$.

a) Seja $V = L\left(\{2+t, 1-t+3t^2, 1+t-t^2, 1+t^2\}\right)$. Determine uma base para $U \cap V$.

b) Determine um subespaço W de $\mathcal{P}_2$ tal que $U \oplus W = \mathcal{P}_2$.