Instituto Superior Técnico - Álgebra Linear - 1^o Semestre 2012/2013

LEAN - LEMat - MEQ

5^a Ficha de exercícios para as aulas de problemas: 23 Out. - 26 Out.

1. Sejam $B_1 = \{(1,2),(0,1)\}$ e $B_2 = \{(1,1),(2,3)\}$ duas bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$. Seja $v = (1,5)$.

   (i) Determine as coordenadas de v em relação à base B_1.

   (ii) Determine a matriz $S_{B_1 \to B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2.

   (iii) Determine as coordenadas de v em relação à base B_2, usando as alíneas anteriores.

   (iv) Determine, directamente, as coordenadas de v em relação à base B_2.

   (v) Determine a matriz $S_{B_2 \to B_1}$ de mudança da base B_2 para a base B_1.

   (vi) Determine as coordenadas de v em relação à base B_1, usando a alínea anterior, e compare com o resultado obtido em **(i).**

2. Considere em $\mathbb{R}^2$ as bases ordenadas $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ em que $\mathcal{B}_1 = \{(1,-1),(0,1)\}$. Seja

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   a matriz de mudança da base $\mathcal{B}_1$ para a base $\mathcal{B}_2$. Determine as coordenadas do vector $(1,1)$ em $\mathcal{B}_2$.

3. Sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ duas bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$. Sejam $(1,2)$ e $(5,11)$ as coordenadas de um vector u em $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ respectivamente. Sejam $(1,1)$ e $(3,7)$ as coordenadas de um vector v em $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ respectivamente. Determine a matriz $S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$ de mudança da base $\mathcal{B}_1$ para $\mathcal{B}_2$.

4. Sejam $B_1 = \{v_1, v_2\}$ e $B_2 = \{w_1, w_2\}$ duas bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$, onde

$$v_1 = (1,2), \quad v_2 = (0,1).$$

   Suponha que a matriz $S_{B_2 \to B_1}$ de mudança da base B_2 para a base B_1, é dada por:

$$S_{B_2 \to B_1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Determine B_2.

5. Sejam $B_1 = \{v_1, v_2\}$ e $B_2 = \{w_1, w_2\}$ duas bases ordenadas de $\mathcal{P}_1$, onde

$$w_1 = -1 + t, \quad w_2 = 1 + t.$$

   Suponha que a matriz $S_{B_1 \to B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2, é dada por:

$$S_{B_1 \to B_2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Determine B_1.

6. Sejam $B_1 = \{v_1, v_2\}$ e $B_2 = \{w_1, w_2\}$ duas bases ordenadas de $\mathcal{P}_1$, onde

$$w_1 = t, \quad w_2 = 1 - t.$$

Suponha que a matriz $S_{B_2 \to B_1}$ de mudança da base B_2 para a base B_1, é dada por:

$$S_{B_2 \to B_1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine B_1.

7. Sejam $B_1 = \{1, 1-t, t^2\}$ e $B_2 = \{1, 1+t, 1+t+t^2\}$ duas bases ordenadas de $\mathcal{P}_2$.

(i) Suponha que as coordenadas de um vector $p(t) \in \mathcal{P}_2$ em relação à base B_2 são dadas por $(1, 2, 3)$. Determine as coordenadas do mesmo vector $p(t)$ em relação à base B_1.

(ii) Determine a matriz $S_{B_1 \to B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2 e utilize-a para determinar as coordenadas do vector $2 - t + t^2$ na base B_2.

8. Sejam $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $B_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ duas bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$, onde

$$v_1 = (1, 0, 1), \quad v_2 = (1, 1, 0), \quad v_3 = (0, 0, 1).$$

Suponha que a matriz $S_{B_1 \to B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2, é dada por:

$$S_{B_1 \to B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine B_2.

9. Sejam

$$B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

e

$$B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

duas bases ordenadas de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Determine a matriz $S_{B_1 \to B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2 e utilize-a para determinar as coordenadas do vector $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ em relação à base B_2.

10. Considere o espaço linear

$$U = L\left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right\} \right).$$

Sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ duas bases ordenadas de U, com $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$. Considere ainda a matriz de mudança de base de $\mathcal{B}_1$ para $\mathcal{B}_2$ dada por: $S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Determine as coordenadas do vector $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ em $\mathcal{B}_1$.

11. Seja $B = \{v_1, v_2\}$ uma base ordenada de $\mathcal{P}_1$. Sejam $(1, -1)$ e $(2, 2)$ respectivamente as coordenadas de dois polinómios $1 + t$ e $1 - t$ em relação à base B. Determine B.

12. Sejam $B_1 = \{v_1, v_2\}$ e $B_2 = \{w_1, w_2\}$ duas bases ordenadas de $\mathcal{P}_1$. Suponha que $(1, -1)$ e $(2, 2)$ são respectivamente as coordenadas de um polinómio $p\,(t)$ em relação às bases B_1 e B_2. Suponha ainda que $(1, 1)$ e $(2, -2)$ são respectivamente as coordenadas de um polinómio $q\,(t)$ em relação às bases B_1 e B_2. Determine a matriz $S_{B_1 \to B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2.

13. Seja $\mathcal{P}_2 = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ o espaço linear real dos polinómios reais de grau menor ou igual a 2. Seja $\mathcal{B} = \{t - t^2, -2 + 2t\}$ uma base ordenada de um subespaço U de $\mathcal{P}_2$.

   a) Determine as coordenadas do vector $1 - t^2$ na base $\mathcal{B}$.

   b) Determine a base ordenada $\mathcal{B}_1$ de U de tal modo que a matriz de mudança da base $\mathcal{B}_1$ para a base $\mathcal{B}$ seja dada por:

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

   c) Sendo $V = L\left(\{-1 + t^2, -2 + t - t^2, 3 - t\}\right)$, determine, justificando, uma base para $U \cap V$.

14. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (i) Calcule a nulidade e a característica de A.

   (ii) Determine bases para o espaço das colunas de A e para o núcleo de A.

   (iii) Usando a alínea anterior, determine a solução geral do sistema de equações lineares homogéneo $Au = \mathbf{0}$.

   (iv) Resolva o sistema de equações $Au = b$, com $b = (1, 0, 2, -1, 0)$. Note que b é igual à 1^a coluna de A e use esse facto de modo a encontrar uma solução particular de $Au = b$.

15. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   a) Determine uma base para $\mathcal{N}\,(A + B)$.

   b) Determine $\dim\left(\mathcal{N}\,(A) + \mathcal{N}\,(B)\right)$.

16. Seja
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Determine uma base para $\mathcal{C}(A)$.

b) Resolva a equação: $Au = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}^T$.

c) Determine uma base para $\mathcal{N}(A+2I)$.

d) Calcule $\dim(\mathcal{N}(A+2I)+\mathcal{N}(A-I))$.

17. Considere o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^4$: $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \; x-y+z-w=0\}$.

a) Determine uma base para $\mathbb{R}^4$ que inclua pelo menos dois vectores de U.

b) Determine uma base para U que inclua os vectores $(1,1,1,1)$ e $(-1,-1,1,1)$.

18. Seja
$$A_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & \alpha & 0 & -1 \\ \alpha & -1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & \alpha & 0 & -\alpha \end{bmatrix}, \text{ com } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Sejam $\mathcal{C}(A_\alpha)$, $\mathcal{L}(A_\alpha)$ e $\mathcal{N}(A_\alpha)$, respectivamente, o espaço das colunas, o espaço das linhas e o núcleo de A_α. Sejam A_0, A_{-1} e A_1 as matrizes que se obtêm de A_α fazendo respectivamente $\alpha = 0$, $\alpha = -1$ e $\alpha = 1$.

a) Determine uma base para $\mathcal{N}(A_{-1})$.

b) Determine uma base para $\mathcal{C}(A_{-1})$ e calcule as coordenadas de $(0,0,0,1)$ nessa base.

c) Determine a solução geral do sistema de equações lineares $A_0 u = b$, onde b é igual à 1^a coluna da matriz A_0.

d) Determine uma base para $\mathcal{L}(A_1) + \mathcal{C}(A_1)$.

e) Determine uma base para $\mathcal{L}(A_{-1}) \cap \mathcal{C}(A_{-1})$.

19. Seja
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Determine o n^o real λ para o qual $u = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ é solução da equação: $Au - \lambda u = \mathbf{0}$.

b) Determine uma base para $\mathcal{N}(A)$.

c) Resolva a equação:
$$Au = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

d) Determine todos os vectores b para os quais a equação $Au = b$ tenha sempre solução.

20. Considere a matriz dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Determine, justificando, a dimensão do núcleo de A.

b) Diga, justificando, se $\{(1,0,0,0)\}$ é uma base do espaço das colunas de A.

21. Considere o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^4$: $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \ x+y+z+w=0\}$.

a) Determine uma base para U.

b) Determine uma base para U que inclua os vectores $(1,-1,-1,1)$ e $(-1,0,0,1)$.

22. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sejam $\mathcal{N}(A), \mathcal{L}(A), \mathcal{C}(A)$, respectivamente, núcleo, espaço das linhas e espaço das colunas de A.

a) Determine uma base para $\mathcal{N}(A)$.

b) Determine uma base para $\mathbb{R}^3$ que inclua duas colunas de A.

c) Determine uma base para $\mathcal{L}(A) \cap \mathcal{C}(A)$.

23. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 4 & a & b \\ c & d & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}).$$

Determine a,b,c,d tais que $\operatorname{nul} A = 2$ e $(1,0,2) \in \mathcal{L}(A)$.

24. Seja U o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por $\{(1,1,0,-1),(1,1,0,1)\}$. Seja

$$S = \{(1,0,0,2)\} + U$$

e considere ainda o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^4$

$$V = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : y = w\right\}.$$

a) Determine um sistema de duas equações lineares cujo conjunto de soluções seja S.

b) Encontre uma matriz A do tipo 2×4 cujo núcleo seja igual a U.

c) Determine uma base para $\mathbb{R}^4$ que inclua dois vectores de U.

d) Sendo $\mathcal{B} = \{(2,2,0,0),(1,1,0,1)\}$ uma base ordenada de U, calcule as coordenadas do vector $(1,1,0,-7)$ em relação a $\mathcal{B}$.

e) Determine uma base para $U+V$ e uma base para $U \cap V$, indicando as respectivas dimensões.