Instituto Superior Técnico - Álgebra Linear - 2^o Semestre 2013/2014
LEAN - LEMat - MEAer - MEAmbi - MEEC - MEMec

2^a Ficha de exercícios para as aulas de problemas: 26 Fev. - 28 Fev.

1. Verifique que:

(i) $\begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{1000} = I$ **(iii)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^2 = -I$

(iv) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{222} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{220} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(v)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

(vi) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(vii)** $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

(viii) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **(ix)** $3\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$

(x) $\left(\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\right)^T - 2\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 2 \\ -3 & \sqrt{2} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -7 & -2\sqrt{2}-11 \\ 9 & 2\sqrt{2}+10 \end{bmatrix}$

(xi) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ (se $ad-bc \neq 0$)

A 2^a coluna de $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 2 & 9 \\ -7 & 1 & 6 \\ 9 & 1 & -7 \end{bmatrix}$ é $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

(xiii) $\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ é ortogonal ($\theta \in \mathbb{R}$). Isto é,

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = I$$

(xiv) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}$ é ortogonal. **(xv)** $\begin{bmatrix} \frac{1}{3}-\frac{2}{3}i & \frac{2}{3}i \\ -\frac{2}{3}i & -\frac{1}{3}-\frac{2}{3}i \end{bmatrix}$ é unitária. Isto é,

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}-\frac{2}{3}i & \frac{2}{3}i \\ -\frac{2}{3}i & -\frac{1}{3}-\frac{2}{3}i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{3}-\frac{2}{3}i & \frac{2}{3}i \\ -\frac{2}{3}i & -\frac{1}{3}-\frac{2}{3}i \end{bmatrix}^H = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}-\frac{2}{3}i & \frac{2}{3}i \\ -\frac{2}{3}i & -\frac{1}{3}-\frac{2}{3}i \end{bmatrix}^H\begin{bmatrix} \frac{1}{3}-\frac{2}{3}i & \frac{2}{3}i \\ -\frac{2}{3}i & -\frac{1}{3}-\frac{2}{3}i \end{bmatrix} = I$$

(xvi) $\begin{bmatrix} 2-3i & 1 \\ -i & 1-2i \end{bmatrix}$ é uma matriz normal. Isto é,

$$\begin{bmatrix} 2-3i & 1 \\ -i & 1-2i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2-3i & 1 \\ -i & 1-2i \end{bmatrix}^H = \begin{bmatrix} 2-3i & 1 \\ -i & 1-2i \end{bmatrix}^H\begin{bmatrix} 2-3i & 1 \\ -i & 1-2i \end{bmatrix}$$

(xvii) As constantes a, b e c que definem a função $y = ax^2 + bx + c$ cujo gráfico passa pelos pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ e (x_3, y_3) (de abcissas distintas entre si), constituem a solução $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ do sistema linear cuja matriz aumentada é dada por: $\left[\begin{array}{ccc|c} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \end{array}\right]$.

2. Efectue, sempre que possível, as seguintes operações.

(i) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -\pi \end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ **(iii)** $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 2 & 4 \\ -3 & \sqrt{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(iv) $2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ **(v)** $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ **(vi)** $\begin{bmatrix} -2 & \sqrt{3} & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

(vii) $\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$ **(viii)** $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix} 2 \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -3 \end{bmatrix} \right)^T$

(ix) $\left(2 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{8}{9} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{5}{3} & 1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \right)^T$

(x) $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 6 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \\ -\frac{1}{3} & -3 \end{bmatrix}$ **(xi)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \\ -\frac{1}{3} & -3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 6 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

3. Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{4\times 4} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ em cada um dos seguintes casos:

(i) $a_{ij} = j^2 (-1)^{i+j}$ **(ii)** $a_{ij} = \begin{cases} -a_{ji} & \text{para todo } i, j \\ j & \text{se } j > i \end{cases}$

4. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Em função do parâmetro α, calcule a característica e a nulidade das seguintes matrizes. Em cada alínea, indique ainda (se existirem), justificando, os valores de α para os quais essas matrizes são invertíveis.

(i) $\begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2-\alpha & -1 \end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix} 2 & \alpha^2 & -\alpha \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha^2 - 1 & \alpha + 1 \end{bmatrix}$ **(iii)** $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -\alpha^2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

5. Existem 16 matrizes 2×2 só com 0 e 1 nas respectivas entradas. Quantas são invertíveis?

6. Determine (se existirem) as inversas das seguintes matrizes.

(i) $[1]$ **(ii)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(iii)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **(iv)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ **(v)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **(vi)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(vii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **(viii)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ **(ix)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(x)** $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

(xi) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ **(xii)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, com $k_1, k_2, k_3, k_4 \neq 0$

7. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^2+2A+2I=\mathbf{0}$. Verifique que A é invertível e determine a sua inversa.

8. Sejam $A, B, X \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrizes invertíveis tais que $(AB)^2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$. Em cada um dos seguintes casos, determine a matriz X que satisfaz a equação

(i) $AXB + AB = \mathbf{0}$ **(ii)** $BXA - A^{-1}B^{-1} = \mathbf{0}$

9. **(i)** Determine $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $\left(2I - (3A^{-1})^T\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$.

(ii) Determine a matriz B tal que $(B^T + 4I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

(iii) Determine a matriz A tal que $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}^T A \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = I$.

10. **(i)** Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que
$$A^k = \mathbf{0}$$
para algum $k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$. Verifique que
$$(I-A)^{-1} = I + A + \ldots + A^{k-1}$$

(ii) Calcule $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$.

11. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$.

(i) Verifique que $A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **(ii)** Calcule $(I-A)(I+A+A^2)$.

12. Seja $B_{a,b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & b \\ 3 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

(i) Determine a característica e a nulidade de $B_{a,b}$ em função de a e b.

(ii) Para $a=1$ e $b=0$ calcule a matriz inversa da matriz $B_{1,0}$, isto é, $(B_{1,0})^{-1}$.

(iii) Determine a solução geral do sistema linear $B_{1,0}X = C$, $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}^T$.

(iv) Para $b=1$, determine a solução geral do sistema linear $B_{a,1}X = D$, em que D é o simétrico da 3^a coluna de $B_{a,1}$.

13. Seja $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Factorize a matriz A na forma $A = LU$, obtendo uma matriz L triangular inferior com 1's na diagonal principal e uma matriz U triangular superior.