Instituto Superior Técnico - Álgebra Linear - 2^o Semestre 2013/2014
LEAN - LEMat - MEAer - MEAmbi - MEEC - MEMec
8^a Ficha de exercícios para as aulas de problemas: 30 Abr. - 2 Mai.

1. Diga quais das seguintes aplicações $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definem em $\mathbb{R}^2$ um produto interno.

   (i) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2$

   (ii) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 3x_2 y_2$

   (iii) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = -2x_1 y_1 + 3x_2 y_2$

2. Diga quais das seguintes aplicações $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definem em $\mathbb{R}^3$ um produto interno.

   (i) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$

   (ii) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_2 - x_2 y_1$

   (iii) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 2x_1 y_1 + x_1 y_3 + x_3 y_1 + 2x_2 y_2 + x_3 y_3$

3. Determine um produto interno em $\mathbb{R}^2$ tal que $\langle (1, 0), (0, 1) \rangle = 2$.

4. Considere os vectores $u = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$ e $v = \left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}} \right)$. Verifique que o conjunto $\{u, v\}$ é ortonormado relativamente ao produto interno definido em $\mathbb{R}^2$ por:

   $$\langle u, v \rangle = 3u_1 v_1 + 2u_2 v_2,$$

   onde $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$. Verifique porém que o mesmo conjunto $\{u, v\}$ não é ortonormado relativamente ao produto interno usual definido em $\mathbb{R}^2$.

5. Considere em $\mathbb{R}^4$ o produto interno usual. Determine o subespaço de $\mathbb{R}^4$ ortogonal aos vectores $(1, 0, 0, 0)$ e $(1, 0, 0, 1)$.

6. Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno definido por:

   $$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

   (i) Calcule $\|u\|$, para qualquer vector $u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

   (ii) Considere os vectores $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (-1, 1, 0)$ e $u_3 = (0, 0, 1)$. Calcule os ângulos formados pelos vectores: u_1 e u_2; u_1 e u_3; u_2 e u_3.

   (iii) Justifique que o conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$. Calcule as coordenadas de um vector $u \in \mathbb{R}^3$ em relação a esta base.

7. Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Determine uma base ortonormada para o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vectores:

   $$(1, 0, -1, 0), (-1, 2, 0, 1) \text{ e } (2, 0, 2, 1).$$

8. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Considere também os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:

$$U = L\left(\{(0,1,1),(0,0,1)\}\right) \qquad \text{e} \qquad V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y - z = 0\right\}.$$

(i) Determine uma base ortogonal para U e uma base ortonormada para V.

(ii) Determine duas bases ortonormadas para $\mathbb{R}^3$: uma que inclua dois vectores de U e outra que inclua dois vectores de V.

(iii) Determine o elemento de U mais próximo de $(1,1,1)$ e a distância entre $(1,1,1)$ e $V^\perp$.

9. Considere o produto interno usual. Sejam

$$U = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + z + w = 0 \quad \text{e} \quad x + y + z + w = 0\right\}$$

e

$$V = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x - z = 0 \quad \text{e} \quad x - w = 0\right\}.$$

a) Determine, justificando, uma base ortogonal para $U^\perp$.

b) Calcule, justificando, a distância entre $(1,1,1,1)$ e U.

c) Determine $u \in U$ e $v \in V$ tais que

$$(1,0,0,0) = u + v.$$

10. Considere o produto interno usual em $\mathbb{R}^3$ e os seguintes planos:

$$U = \{(0,-1,1)\} + L\left(\{(1,0,0),(0,1,1)\}\right), \quad V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y - z = 0\}.$$

Determine, justificando, uma base ortogonal para $\mathbb{R}^3$ que inclua um vector de $V^\perp$ e calcule, justificando, a distância entre U e V.

11. Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno para o qual a base ordenada de $\mathbb{R}^3$:

$$\{(1,0,-1),(0,1,0),(-1,0,2)\}$$

é ortonormada. Verifique que esse produto interno é definido pela aplicação $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3) \rangle = 5x_1y_1 + 3x_1y_3 + x_2y_2 + 3x_3y_1 + 2x_3y_3$$

e determine, relativamente a ele, uma base para $\left(L\left(\{(-2,0,3),(0,1,0)\}\right)\right)^\perp$.

12. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e considere o produto interno usual. Sejam $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{C}(A)$ e $\mathcal{L}(A)$ respectivamente o núcleo, espaço das colunas e espaço das linhas de A.

(i) Determine uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ que inclua dois vectores de $\mathcal{C}(A)$.

(ii) Determine o elemento de $\mathcal{L}(A)$ mais próximo de $(1,1,1)$ e a distância entre $(1,1,1)$ e $\mathcal{N}(A)$.

13. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e considere o produto interno usual. Sejam $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{C}(A)$ e $\mathcal{L}(A)$ respectivamente o núcleo, espaço das colunas e espaço das linhas de A.

(i) Determine uma base ortonormada para $(\mathcal{N}(A))^{\perp}$ (o complemento ortogonal do núcleo de A).

(ii) Determine uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ que inclua dois vectores de $\mathcal{C}(A)$.

(iii) Determine o elemento de $\mathcal{L}(A)$ mais próximo de $(1,2,3)$ e a distância entre $(1,2,3)$ e $(\mathcal{L}(A))^{\perp}$.

14. Considere em $\mathbb{R}^4$ o seguinte subespaço: $U = L(\{(1,1,1,0),(0,1,1,1)\})$. Determine uma matriz A do tipo 2×4 cujo núcleo seja igual a U, isto é, tal que $U = \mathcal{N}(A)$.

15. Defina o produto interno em $\mathbb{R}^2$ em relação ao qual a base $\{(1,0),(1,-1)\}$ é ortonormada.

16. Considere a aplicação $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3) \rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 4x_2y_2 + x_3y_3.$$

(i) Verifique que $\langle , \rangle$ define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

(ii) Seja $V = L(\{(3,4,0)\}) \subset \mathbb{R}^3$. Diga qual é o ponto de V mais próximo de $(0,1,0)$.

(iii) Determine uma base ortogonal para o complemento ortogonal de V, em relação ao produto interno $\langle , \rangle$.

(iv) Seja $P_V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a projecção ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre V. Indique, em relação ao produto interno $\langle , \rangle$, uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$ para a qual a representação matricial de P_V seja dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

17. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Seja U o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $v_1 = (0,1,0)$ e $v_2 = \left(\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5}\right)$. Escreva $u = (1,2,3)$ na forma $u = u_1 + u_2$, com $u_1 \in U$ e $u_2 \in U^{\perp}$.

18. Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Em cada alínea seguinte, determine uma base ortogonal para o complemento ortogonal de U, isto é, para $U^{\perp}$.

(i) $U = L(\{(1,0,0,0),(1,1,0,1)\})$

(ii) $U = L(\{(1,0,1,1)\})$

(iii) $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y + z + 2w = 0\}$

(iv) $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x - z = 0 \quad \text{e} \quad 2x - y + 2z - w = 0\}$

19. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Considere também o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^3$:

$$U = L\left(\{(1,1,1),(1,0,0)\}\right).$$

(i) Determine uma base ortogonal para U.

(ii) Determine $u \in U$ e $v \in U^{\perp}$ tais que $(3,2,1) = u + v$.

(iii) Determine a distância entre o ponto $(1,0,1)$ e o plano $\{(1,1,0)\} + U$.

(iv) Determine a distância entre o ponto (x,y,z) e o plano U.

20. Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Considere também o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^4$:

$$U = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z = 0 \quad \text{e} \quad y - z + w = 0\right\}.$$

(i) Determine uma base ortonormada para U.

(ii) Determine uma base ortonormada para $U^{\perp}$.

(iii) Determine as projecções ortogonais de $(0,0,1,0)$ sobre U e $U^{\perp}$ respectivamente.

(iv) Determine as representações matriciais de $P_U : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ e de $P_{U^{\perp}} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ em relação à base canónica de $\mathbb{R}^4$.

(v) Determine a distância entre o ponto $(0,0,1,0)$ e o subespaço U.

(vi) Determine a distância entre o ponto (x,y,z,w) e o subespaço U.

21. Considere $P_2 = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ a aplicação $\langle , \rangle : P_2 \times P_2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\langle p(t), q(t)\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

Considere também o seguinte subespaço de P_2: $U = \{p(t) \in P_2 : p(0) = 0\}$.

(i) Verifique que $\langle , \rangle$ define um produto interno em P_2.

(ii) Determine uma base ortonormada para U.

(iii) Determine uma base ortonormada para $U^{\perp}$.

(iv) Determine as projecções ortogonais do polinómio $1 + t$ sobre U e $U^{\perp}$ respectivamente.

(v) Determine as representações matriciais de $P_U : P_2 \to P_2$ e de $P_{U^{\perp}} : P_2 \to P_2$ em relação à base canónica $\{1, t, t^2\}$ de P_2.

(vi) Determine a distância entre $1 + t$ e U.

(vii) Determine a distância entre o polinómio $a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ e o subespaço U.

22. Considere a aplicação $\langle , \rangle : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^T).$$

Considere também o subespaço U de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ constituído por todas as matrizes simétricas reais do tipo 2×2:

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : b = c \right\}.$$

(i) Verifique que $\langle , \rangle$ define um produto interno em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(ii) Determine uma base ortonormada para U.

(iii) Determine uma base ortonormada para $U^{\perp}$.

(iv) Determine as representações matriciais de $P_U : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e de $P_{U^{\perp}} : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ em relação à base canónica

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(v) Determine as projecções ortogonais da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sobre U e $U^{\perp}$ respectivamente.

(vi) Qual é a matriz simétrica mais próxima da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$?

(vii) Determine a distância entre $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e U.

(viii) Determine a distância entre $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e U.

23. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Considere também o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^3$:

$$U = L\left(\{(1,0,-1),(0,-1,1)\}\right).$$

a) Determine uma base ortogonal para U.

b) Determine uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ que inclua dois vectores geradores de U.

c) Determine a projecção ortogonal de $(1,0,0)$ sobre $U^{\perp}$, isto é, $P_{U^{\perp}}(1,0,0)$.

d) Determine a distância do ponto $(1,0,0)$ a $U^{\perp}$.

24. Seja

$$P_2 = \left\{ p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

o espaço linear dos polinómios de grau menor ou igual a 2. Considere a aplicação $\langle , \rangle$ $: P_2 \times P_2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\left\langle a_0 + a_1 t + a_2 t^2, b_0 + b_1 t + b_2 t^2 \right\rangle = 3a_0 b_0 + a_1 b_1 + 2a_2 b_2. \quad (*)$$

Considere também o seguinte subespaço de P_2:

$$W = \left\{ p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in P_2 : p(0) = p(1) \ \text{ e } \ p(1) = p(-1) \right\}.$$

a) Verifique que a aplicação $\langle , \rangle$ define em P_2 um produto interno.

b) Determine uma base ortonormada para $W^{\perp}$, relativamente ao produto interno (*).

25. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e considere o produto interno usual. Sejam $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{C}(A)$ e $\mathcal{L}(A)$ respectivamente o núcleo, espaço das colunas e espaço das linhas de A.

a) Determine uma base ortogonal para $\mathcal{L}(A)$.

b) Determine uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ que inclua dois vectores de $\mathcal{C}(A)$.

c) Determine o elemento de $(\mathcal{N}(A))^\perp$ mais próximo de $(-1,1,-1)$ e a distância entre $(-1,1,-1)$ e $(\mathcal{L}(A))^\perp$.

26. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Seja U o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelo conjunto

$$\{(1,0,-1),(0,1,2)\}.$$

a) Determine uma base ortogonal para U.

b) Determine $u \in U$ e $v \in U^\perp$ tais que $(2,-3,4) = u + v$.

c) Determine a distância entre o ponto $(2,3,7)$ e o plano $\{(1,2,3)\} + U$.

27. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sejam $\mathcal{C}(A)$, $\mathcal{L}(A)$ e $\mathcal{N}(A)$, respectivamente, o espaço das colunas, o espaço das linhas e o núcleo de A.

a) Determine uma base ortogonal para $\mathbb{R}^3$ que inclua um vector de $(\mathcal{C}(A))^\perp$ (complemento ortogonal de $\mathcal{C}(A)$).

b) Calcule a distância entre $(1,1,0)$ e $\mathcal{L}(A)$.

c) Determine uma matriz B tal que $(\mathcal{N}(A))^\perp = \mathcal{N}(B)$ (o complemento ortogonal de $\mathcal{N}(A)$ é igual ao núcleo de B).

28. Considere o espaço linear $\mathbb{R}^4$ munido com o produto interno usual e os seguintes subespaços lineares de $\mathbb{R}^4$:

$$V = L(\{(1,1,0,0),(1,0,1,-1)\}), \qquad W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \ x - y + 2z + 3w = 0\}.$$

a) Determine $u \in V$ e $v \in V^\perp$ tais que $(2,-2,1,-1) = u + v$ e calcule a distância entre $(1,1,1,1)$ e V.

b) Encontre uma matriz A tal que $W^\perp = \mathcal{N}(A)$.

c) Verifique que $V \subset W$ e determine uma base para $W^\perp \cap V^\perp$.

d) Verifique se $V^\perp + W^\perp = \mathbb{R}^4$, justificando.

29. Considere o espaço linear $\mathbb{R}^4$ munido com o produto interno usual e os seguintes subespaços lineares de $\mathbb{R}^4$:

$$U = L\left(\{(0,1,1,1),(1,-1,1,0)\}\right), \qquad V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : 4x + 3y + 2z + w = 0\}.$$

a) Determine uma base ortogonal para $V^\perp$.

b) Determine a distância entre o ponto $(1,2,3,4)$ e o subespaço $V^\perp$.

c) Determine uma base ortogonal para $\mathbb{R}^4$ que inclua os vectores $(0,1,1,1)$ e $(1,-1,1,0)$.

d) Encontre uma matriz A tal que $U = (\mathcal{C}(A))^\perp$.

30. Seja
$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x - 2y - 3z = 0\}.$$
Considere o produto interno usual.

a) Determine as equações cartesianas da recta que passa pelo ponto $u = (1,1,1)$ e é perpendicular ao plano W.

b) Determine a equação cartesiana do plano que passa pelo ponto $u = (1,1,1)$ e é paralelo ao plano W.

31. Considere a recta
$$r = (1,1,1) + L\left(\{(1,-1,1)\}\right).$$
Considere o produto interno usual.

a) Determine as equações cartesianas da recta r.

b) Determine a equação cartesiana do plano que passa pelo ponto $u = (1,0,0)$ e é perpendicular à recta r.

32. Seja P o plano que passa pelos pontos
$$(1,1,1)\,, (2,0,3) \quad \text{e} \quad (0,2,2)\,.$$
Considere o produto interno usual.

a) Determine a equação cartesiana de P.

b) Determine as equações paramétricas de P.

c) Determine a equação vectorial de P.

33. Determine a solução de mínimos quadrados de $Au = b$, com
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$
calculando o correspondente vector erro de mínimos quadrados.