

2^a Ficha de exercícios para as aulas de problemas

1. Verifique que:

$$(i) \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (ii) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{1000} = I \quad (iii) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^2 = -I$$

$$(iv) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{222} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{220} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (v) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(vi) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (vii) \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(viii) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (ix) 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$$(x) \left(\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \right)^T - 2 \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 2 \\ -3 & \sqrt{2} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -7 & -2\sqrt{2} - 11 \\ 9 & 2\sqrt{2} + 10 \end{bmatrix}$$

$$(xi) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (\text{se } ad - bc \neq 0)$$

$$\text{A 2ª coluna de } \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 2 & 9 \\ -7 & 1 & 6 \\ 9 & 1 & -7 \end{bmatrix} \text{ é } \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(xiii) \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \text{ é ortogonal } (\theta \in \mathbb{R}). \text{ Isto é,}$$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = I$$

$$(xiv) \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix} \text{ é ortogonal. } \quad (xv) \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - \frac{2}{3}i & \frac{2}{3}i \\ -\frac{2}{3}i & -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}i \end{bmatrix} \text{ é unitária. Isto é,}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} - \frac{2}{3}i & \frac{2}{3}i \\ -\frac{2}{3}i & -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - \frac{2}{3}i & \frac{2}{3}i \\ -\frac{2}{3}i & -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}i \end{bmatrix}^H = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - \frac{2}{3}i & \frac{2}{3}i \\ -\frac{2}{3}i & -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}i \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - \frac{2}{3}i & \frac{2}{3}i \\ -\frac{2}{3}i & -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}i \end{bmatrix} = I$$

$$(xvi) \begin{bmatrix} 2 - 3i & 1 \\ -i & 1 - 2i \end{bmatrix} \text{ é uma matriz normal. Isto é,}$$

$$\begin{bmatrix} 2 - 3i & 1 \\ -i & 1 - 2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 - 3i & 1 \\ -i & 1 - 2i \end{bmatrix}^H = \begin{bmatrix} 2 - 3i & 1 \\ -i & 1 - 2i \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} 2 - 3i & 1 \\ -i & 1 - 2i \end{bmatrix}$$

(xvii) As constantes a, b e c que definem a função $y = ax^2 + bx + c$ cujo gráfico passa pelos pontos (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_3, y_3) (de abcissas distintas entre si), constituem a

solução $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ do sistema linear cuja matriz aumentada é dada por: $\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 & | & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & | & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & | & y_3 \end{bmatrix}$.

2. Efectue, sempre que possível, as seguintes operações.

$$\begin{aligned}
 & \text{(i)} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -\pi \end{bmatrix} \quad \text{(ii)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(iii)} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 2 & 4 \\ -3 & \sqrt{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
 & \text{(iv)} 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{(v)} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{(vi)} \begin{bmatrix} -2 & \sqrt{3} & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \\
 & \text{(vii)} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} \quad \text{(viii)} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix} 2 \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -3 \end{bmatrix} \right)^T \\
 & \text{(ix)} \left(2 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{8}{9} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{5}{3} & 1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \right)^T \\
 & \text{(x)} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 6 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \\ -\frac{1}{3} & -3 \end{bmatrix} \quad \text{(xi)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \\ -\frac{1}{3} & -3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 6 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

3. Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{4 \times 4} \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ em cada um dos seguintes casos:

$$\text{(i)} \quad a_{ij} = j^2 (-1)^{i+j} \quad \text{(ii)} \quad a_{ij} = \begin{cases} -a_{ji} & \text{para todo } i, j \\ j & \text{se } j > i \end{cases}$$

4. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Em função do parâmetro α , calcule a característica e a nulidade das seguintes matrizes. Em cada alínea, indique ainda (se existirem), justificando, os valores de α para os quais essas matrizes são invertíveis.

$$\text{(i)} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 - \alpha & -1 \end{bmatrix} \quad \text{(ii)} \begin{bmatrix} 2 & \alpha^2 & -\alpha \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha^2 - 1 & \alpha + 1 \end{bmatrix} \quad \text{(iii)} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -\alpha^2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

5. Existem 16 matrizes 2×2 só com 0 e 1 nas respectivas entradas. Quantas são invertíveis?

6. Determine (se existirem) as inversas das seguintes matrizes.

$$\begin{aligned}
 & \text{(i)} [1] \quad \text{(ii)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(iii)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(iv)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{(v)} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(vi)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 & \text{(vii)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(viii)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{(ix)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(x)} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\
 & \text{(xi)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{(xii)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ com } k_1, k_2, k_3, k_4 \neq 0
 \end{aligned}$$

7. Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^2 + 2A + 2I = \mathbf{0}$. Verifique que A é invertível e determine a sua inversa.

8. Sejam $A, B, X \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ matrizes invertíveis tais que $(AB)^2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$. Em cada um dos seguintes casos, determine a matriz X que satisfaz a equação

$$(i) \quad AXB + AB = \mathbf{0} \qquad (ii) \quad BXA - A^{-1}B^{-1} = \mathbf{0}$$

9. (i) Determine $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tal que $(2I - (3A^{-1})^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$.

(ii) Determine a matriz B tal que $(B^T + 4I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

(iii) Determine a matriz A tal que $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}^T A \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = I$.

10. (i) Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tal que

$$A^k = \mathbf{0}$$

para algum $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Verifique que

$$(I - A)^{-1} = I + A + \dots + A^{k-1}$$

(ii) Calcule $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$.

11. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$.

(i) Verifique que $A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (ii) Calcule $(I - A)(I + A + A^2)$.

12. Seja $B_{a,b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & b \\ 3 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

(i) Determine a característica e a nulidade de $B_{a,b}$ em função de a e b .

(ii) Para $a = 1$ e $b = 0$ calcule a matriz inversa da matriz $B_{1,0}$, isto é, $(B_{1,0})^{-1}$.

(iii) Determine a solução geral do sistema linear $B_{1,0}X = C$, $C = [1 \quad -2 \quad 3 \quad -1]^T$.

(iv) Para $b = 1$, determine a solução geral do sistema linear $B_{a,1}X = D$, em que D é o simétrico da 3ª coluna de $B_{a,1}$.

13. Seja $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Factorize a matriz A na forma $A = LU$, obtendo uma matriz L triangular inferior com 1's na diagonal principal e uma matriz U triangular superior.