

3ª Ficha de exercícios para as aulas de problemas

1. Verifique que os seguintes subconjuntos de \mathbb{R}^2 , com as operações usuais, não são subespaços de \mathbb{R}^2 .

(i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$

(ii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$

(iii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$

(iv) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = \pi\}$

(v) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{N}_0 \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$

(vi) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \pi^2\}$

(vii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$

2. Verifique que os seguintes conjuntos, com as operações usuais, são (todos os) subespaços de \mathbb{R}^2 .

(i) $\{(0, 0)\}$

(ii) $V_k = \{(x, kx) : x \in \mathbb{R}\}$ com $k \in \mathbb{R}$

(iii) $U = \{(0, a) : a \in \mathbb{R}\}$

(iv) \mathbb{R}^2

3. No espaço linear \mathbb{R}^3 , considere o subconjunto $U_k = \{(x, y, k) : x, y \in \mathbb{R}\}$ onde k é uma constante real. Determine os valores de k para os quais U_k é subespaço de \mathbb{R}^3 .

4. Considere o espaço linear \mathbb{R}^3 . Diga quais dos seguintes subconjuntos de \mathbb{R}^3 , com as operações usuais, são subespaços de \mathbb{R}^3 e indique os respectivos conjuntos geradores. Escreva ainda cada um dos subespaços na forma $\mathcal{N}(A)$, explicitando a matriz A .

(i) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2\}$

(ii) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$

(iii) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$

(iv) $\{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$

(v) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2x \text{ e } z = 3x\}$

(vi) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 1\}$

(vii) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \text{ e } x - y - z = 0\}$

(viii) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y \text{ ou } y = z\}$

(ix) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0 \text{ e } 2y + z = 0\}$

(x) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}$

5. Diga se os vectores $(-2, 2, 2, 0)$, $(-2, 1, 1, 0)$, $(0, -1, 1, -1)$ pertencem aos seguintes subespaços e encontre um conjunto de geradores para cada um desses subespaços do espaço linear \mathbb{R}^4 .

(i) $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 0 \text{ e } y + z = 0\}$

(ii) $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0\}$

(iii) $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y - z = 0 \text{ e } x + y + 2w = 0 \text{ e } y - z + w = 0\}$

6. Seja \mathcal{P}_n o espaço linear de todos os polinómios reais de variável real e de grau menor ou igual a n , com as operações usuais. Diga quais dos seguintes subconjuntos de \mathcal{P}_2 , com as operações usuais, são subespaços de \mathcal{P}_2 e indique os respectivos conjuntos geradores.

- (i) $\{a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_0 = 0\}$
- (ii) $\{a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 = 2a_0 \text{ e } a_1 = 0\}$
- (iii) $\{a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_1 = 1\}$
- (iv) $\{a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 - a_1 = 2\}$
- (v) $\{a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 - a_1 + 2a_0 = 0\}$

7. Defina por meio de sistemas de equações homogéneas os seguintes subespaços.

- (i) Em \mathcal{P}_2 : $L(\{1 - t^2, 1 + t\})$
- (ii) $L(\{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (-2, 1, -2)\})$
- (iii) $L(\{(0, 1, 0), (-2, 1, -2)\})$
- (iv) $L(\{(1, 1, 2), (2, 1, 1)\})$
- (v) $L(\{(1, 0, -1, 1)\})$
- (vi) $L(\{(1, -2, 5, -3), (2, -4, 6, 2), (3, -6, 11, -1), (0, 0, 1, -2)\})$

8. Seja $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ o espaço linear de todas as matrizes do tipo $m \times n$ com entradas reais. Diga quais dos seguintes subconjuntos de $\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$, com as operações usuais, são subespaços de $\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ e indique os respectivos conjuntos geradores.

- (i) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R}) : b = a + c \right\}$
- (ii) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & 0 & f \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R}) : b < 0 \right\}$
- (iii) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R}) : a = -2c \text{ e } f = 2e + d \right\}$.

9. Construa uma matriz cujo núcleo seja gerado pelo vector $(2, 0, 1)$.

10. Existe alguma matriz cujo espaço das linhas contém o vector $(1, 1, 1)$ e cujo núcleo contém $(1, 0, 0)$?

11. Determine o espaço das colunas, o espaço das linhas e o núcleo das seguintes matrizes.

- (i) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- (v) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ (vii) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (viii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

12. Verifique que, com as operações usuais, o seguinte conjunto de matrizes

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

gera o subespaço $\left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \\ 0 & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathbb{R}) : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ do espaço linear $\mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathbb{R})$.

13. Considere, no espaço linear \mathbb{R}^3 , os vectores $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (1, 0, 2)$ e $v_3 = (1, 1, 0)$. Mostre que os seguintes vectores são combinações lineares de v_1, v_2 e v_3 .

(i) $(3, 3, 0)$ (ii) $(2, 1, 5)$ (iii) $(-1, 2, 0)$ (iv) $(1, 1, 1)$

14. Considere, no espaço linear \mathbb{R}^4 , os vectores $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (1, -1, 0, 0)$ e $v_3 = (0, 1, 2, 1)$. Diga quais dos seguintes vectores pertencem ao subespaço $L(\{v_1, v_2, v_3\})$.

(i) $(-1, 4, 2, 2)$ (ii) $(2, 0, 2, 2)$ (iii) $(1, 1, -2, 2)$ (iv) $(0, 1, 1, 0)$

15. Determine o valor de k para o qual o vector $u = (1, -2, k) \in \mathbb{R}^3$ é combinação linear dos vectores

$$v = (3, 0, -2) \quad \text{e} \quad w = (2, -1, -5).$$

16. Verifique que os seguintes conjuntos de vectores geram \mathbb{R}^3 .

(i) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

(ii) $\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$

(iii) $\{(1, 1, 1), (-1, 1, -1), (1, -1, -1), (-1, -1, 1)\}$

17. Determine os vectores (a, b, c) de \mathbb{R}^3 que pertencem a $L(\{u, v, w\})$ onde

$$u = (2, 1, 0), \quad v = (1, -1, 2) \quad \text{e} \quad w = (0, 3, -4).$$

18. Considere, no espaço linear \mathcal{P}_2 , os vectores $p_1(t) = 2 + t + 2t^2$, $p_2(t) = -2t + t^2$, $p_3(t) = 2 - 5t + 5t^2$ e $p_4(t) = -2 - 3t - t^2$. O vector

$$q(t) = 2 + t + t^2$$

pertence à expansão linear $L(\{p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t)\})$? Podem os vectores $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ e $p_4(t)$ gerar \mathcal{P}_2 ?

19. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 13 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Verifique que o espaço das linhas de A é igual ao espaço das linhas de B . Conclua então que os espaços das colunas de A^T e de B^T são iguais.

20. Escreva a matriz $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ como combinação linear das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Encontre uma matriz 2×2 que não pertença a

$$L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

21. Seja U o subespaço de \mathbb{R}^4 gerado por $\{(1, 1, 0, -1), (1, 1, 0, 1)\}$. Seja $S = \{(1, 0, 0, 2)\} + U$ e considere ainda o seguinte subespaço de \mathbb{R}^4 : $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : y = w\}$.

a) Determine um sistema de duas equações lineares cujo conjunto de soluções seja S .

b) Encontre uma matriz A do tipo 2×4 cujo núcleo seja igual a U .

22. Considere os seguintes subespaços U e V de \mathbb{R}^3 e determine $u_1, u_2, u_3, v \in \mathbb{R}^3$ tais que $U + V = L(\{u_1, u_2, u_3\})$ e $U \cap V = L(\{v\})$.

$$U = L(\{(1, -1, 1), (0, 1, 1)\}), \quad V = L(\{(1, 1, 2), (-1, 1, 1)\}).$$

23. Considere os seguintes subespaços U e V de \mathbb{R}^3 , determine $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$ tais que $U + V = L(\{u_1, u_2\})$ e verifique que $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$.

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0 \text{ e } x + y = 0\}, \quad V = L(\{(1, 1, 1)\}).$$

24. Considere os seguintes subespaços U e V de \mathbb{R}^3 e determine $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$ tais que $U + V = L(\{u_1, u_2, u_3\})$ e $U \cap V = L(\{v\})$.

$$U = L(\{(1, 0, 1), (-1, 1, 2)\}), \quad V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 3z = 0\}.$$

25. Considere os seguintes subespaços U e V de \mathbb{R}^3 , determine $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$ tais que $U + V = L(\{u_1, u_2, u_3\})$ e verifique que $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$.

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}, \quad V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}.$$

26. Considere os seguintes subespaços U e V de \mathcal{P}_2 e determine $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathcal{P}_2$ tais que $U + V = L(\{u_1, u_2\})$ e $U \cap V = L(\{v_1, v_2\})$.

$$U = L(\{1 + t, 1 - t^2\}), \quad V = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 - a_1 + a_0 = 0\}.$$

27. Considere os seguintes subespaços U e V de \mathcal{P}_2 e determine $u_1, u_2, u_3, v \in \mathcal{P}_2$ tais que $U + V = L(\{u_1, u_2, u_3\})$ e $U \cap V = L(\{v\})$.

$$U = \{p(t) \in \mathcal{P}_2 : p(-1) = 2p(0) - p(1)\}, \quad V = L(\{-1 + t, 1 - t^2\}) \text{ em } \mathcal{P}_2.$$

28. Considere os seguintes subespaços U e V de \mathcal{P}_2 e determine $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathcal{P}_2$ tais que $U + V = L(\{u_1, u_2\})$ e $U \cap V = L(\{v_1, v_2\})$.

$$U = \{p(t) \in \mathcal{P}_2 : p(1) = 0\}, \quad V = L(\{1 - t, t - t^2, -1 + t^2\}) \text{ em } \mathcal{P}_2.$$

29. Considere os seguintes subespaços U e V de \mathcal{P}_3 e determine $u_1, u_2, u_3, u_4, v \in \mathcal{P}_3$ tais que $U + V = L(\{u_1, u_2, u_3, u_4\})$ e $U \cap V = L(\{v\})$.

$$U = L(\{1 + t, 1 - t^3\}), \quad V = L(\{1 + t + t^2, t - t^3, 1 + t + t^3\}) \text{ em } \mathcal{P}_3.$$