

5^a Ficha de exercícios para as aulas de problemas

1. Sejam $B_1 = \{(1, 2), (0, 1)\}$ e $B_2 = \{(1, 1), (2, 3)\}$ duas bases ordenadas de \mathbb{R}^2 . Seja $v = (1, 5)$.

(i) Determine as coordenadas de v em relação à base B_1 .

(ii) Determine a matriz $S_{B_1 \rightarrow B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2 .

(iii) Determine as coordenadas de v em relação à base B_2 , usando as alíneas anteriores.

(iv) Determine, directamente, as coordenadas de v em relação à base B_2 .

(v) Determine a matriz $S_{B_2 \rightarrow B_1}$ de mudança da base B_2 para a base B_1 .

(vi) Determine as coordenadas de v em relação à base B_1 , usando a alínea anterior, e compare com o resultado obtido em (i).

2. Considere em \mathbb{R}^2 as bases ordenadas \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 em que $\mathcal{B}_1 = \{(1, -1), (0, 1)\}$. Seja

$$S_{\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a matriz de mudança da base \mathcal{B}_1 para a base \mathcal{B}_2 . Determine as coordenadas do vector $(1, 1)$ em \mathcal{B}_2 .

3. Sejam \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 duas bases ordenadas de \mathbb{R}^2 . Sejam $(1, 2)$ e $(5, 11)$ as coordenadas de um vector u em \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 respectivamente. Sejam $(1, 1)$ e $(3, 7)$ as coordenadas de um vector v em \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 respectivamente. Determine a matriz $S_{\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2}$ de mudança da base \mathcal{B}_1 para \mathcal{B}_2 .

4. Sejam $B_1 = \{v_1, v_2\}$ e $B_2 = \{w_1, w_2\}$ duas bases ordenadas de \mathbb{R}^2 , onde

$$v_1 = (1, 2), \quad v_2 = (0, 1).$$

Suponha que a matriz $S_{B_2 \rightarrow B_1}$ de mudança da base B_2 para a base B_1 , é dada por:

$$S_{B_2 \rightarrow B_1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine B_2 .

5. Sejam $B_1 = \{v_1, v_2\}$ e $B_2 = \{w_1, w_2\}$ duas bases ordenadas de \mathcal{P}_1 , onde

$$w_1 = -1 + t, \quad w_2 = 1 + t.$$

Suponha que a matriz $S_{B_1 \rightarrow B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2 , é dada por:

$$S_{B_1 \rightarrow B_2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine B_1 .

6. Sejam $B_1 = \{v_1, v_2\}$ e $B_2 = \{w_1, w_2\}$ duas bases ordenadas de \mathcal{P}_1 , onde

$$w_1 = t, \quad w_2 = 1 - t.$$

Suponha que a matriz $S_{B_2 \rightarrow B_1}$ de mudança da base B_2 para a base B_1 , é dada por:

$$S_{B_2 \rightarrow B_1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine B_1 .

7. Sejam $B_1 = \{1, 1 - t, t^2\}$ e $B_2 = \{1, 1 + t, 1 + t + t^2\}$ duas bases ordenadas de \mathcal{P}_2 .

(i) Suponha que as coordenadas de um vector $p(t) \in \mathcal{P}_2$ em relação à base B_2 são dadas por $(1, 2, 3)$. Determine as coordenadas do mesmo vector $p(t)$ em relação à base B_1 .

(ii) Determine a matriz $S_{B_1 \rightarrow B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2 e utilize-a para determinar as coordenadas do vector $2 - t + t^2$ na base B_2 .

8. Sejam $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $B_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ duas bases ordenadas de \mathbb{R}^3 , onde

$$v_1 = (1, 0, 1), \quad v_2 = (1, 1, 0), \quad v_3 = (0, 0, 1).$$

Suponha que a matriz $S_{B_1 \rightarrow B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2 , é dada por:

$$S_{B_1 \rightarrow B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine B_2 .

9. Sejam

$$B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

e

$$B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

duas bases ordenadas de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Determine a matriz $S_{B_1 \rightarrow B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2 e utilize-a para determinar as coordenadas do vector $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ em relação à base B_2 .

10. Considere o espaço linear

$$U = L \left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right\} \right).$$

Sejam \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 duas bases ordenadas de U , com $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$. Considere

ainda a matriz de mudança de base de \mathcal{B}_1 para \mathcal{B}_2 dada por: $S_{\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Determine as coordenadas do vector $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ em \mathcal{B}_1 .

11. Seja $B = \{v_1, v_2\}$ uma base ordenada de \mathcal{P}_1 . Sejam $(1, -1)$ e $(2, 2)$ respectivamente as coordenadas de dois polinómios $1 + t$ e $1 - t$ em relação à base B . Determine B .
12. Sejam $B_1 = \{v_1, v_2\}$ e $B_2 = \{w_1, w_2\}$ duas bases ordenadas de \mathcal{P}_1 . Suponha que $(1, -1)$ e $(2, 2)$ são respectivamente as coordenadas de um polinómio $p(t)$ em relação às bases B_1 e B_2 . Suponha ainda que $(1, 1)$ e $(2, -2)$ são respectivamente as coordenadas de um polinómio $q(t)$ em relação às bases B_1 e B_2 . Determine a matriz $S_{B_1 \rightarrow B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2 .
13. Seja $\mathcal{P}_2 = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ o espaço linear real dos polinómios reais de grau menor ou igual a 2. Seja $\mathcal{B} = \{t - t^2, -2 + 2t\}$ uma base ordenada de um subespaço U de \mathcal{P}_2 .

a) Determine as coordenadas do vector $1 - t^2$ na base \mathcal{B} .

b) Determine a base ordenada \mathcal{B}_1 de U de tal modo que a matriz de mudança da base \mathcal{B}_1 para a base \mathcal{B} seja dada por:

$$S_{\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

c) Sendo $V = L(\{-1 + t^2, -2 + t - t^2, 3 - t\})$, determine, justificando, uma base para $U \cap V$.

14. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(i) Calcule a nulidade e a característica de A .

(ii) Determine bases para o espaço das colunas de A e para o núcleo de A .

(iii) Usando a alínea anterior, determine a solução geral do sistema de equações lineares homogéneo $Au = \mathbf{0}$.

(iv) Resolva o sistema de equações $Au = b$, com $b = (1, 0, 2, -1, 0)$. Note que b é igual à 1ª coluna de A e use esse facto de modo a encontrar uma solução particular de $Au = b$.

15. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Determine uma base para $\mathcal{N}(A + B)$.

b) Determine $\dim(\mathcal{N}(A) + \mathcal{N}(B))$.

16. Seja

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

- a) Determine uma base para $\mathcal{C}(A)$.
- b) Resolva a equação: $Au = [2 \ 0 \ -2]^T$.
- c) Determine uma base para $\mathcal{N}(A + 2I)$.
- d) Calcule $\dim(\mathcal{N}(A + 2I) + \mathcal{N}(A - I))$.

17. Considere o seguinte subespaço de \mathbb{R}^4 : $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - w = 0\}$.

- a) Determine uma base para \mathbb{R}^4 que inclua pelo menos dois vetores de U .
- b) Determine uma base para U que inclua os vetores $(1, 1, 1, 1)$ e $(-1, -1, 1, 1)$.

18. Seja

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & \alpha & 0 & -1 \\ \alpha & -1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & \alpha & 0 & -\alpha \end{bmatrix}, \text{ com } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Sejam $\mathcal{C}(A_\alpha)$, $\mathcal{L}(A_\alpha)$ e $\mathcal{N}(A_\alpha)$, respectivamente, o espaço das colunas, o espaço das linhas e o núcleo de A_α . Sejam A_0, A_{-1} e A_1 as matrizes que se obtêm de A_α fazendo respectivamente $\alpha = 0$, $\alpha = -1$ e $\alpha = 1$.

- a) Determine uma base para $\mathcal{N}(A_{-1})$.
- b) Determine uma base para $\mathcal{C}(A_{-1})$ e calcule as coordenadas de $(0, 0, 0, 1)$ nessa base.
- c) Determine a solução geral do sistema de equações lineares $A_0u = b$, onde b é igual à 1ª coluna da matriz A_0 .
- d) Determine uma base para $\mathcal{L}(A_1) + \mathcal{C}(A_1)$.
- e) Determine uma base para $\mathcal{L}(A_{-1}) \cap \mathcal{C}(A_{-1})$.

19. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- a) Determine o n° real λ para o qual $u = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ é solução da equação: $Au - \lambda u = \mathbf{0}$.
- b) Determine uma base para $\mathcal{N}(A)$.
- c) Resolva a equação:

$$Au = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

- d) Determine todos os vetores b para os quais a equação $Au = b$ tenha sempre solução.

20. Considere a matriz dada por: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Determine, justificando, a dimensão do núcleo de A .

b) Diga, justificando, se $\{(1, 0, 0, 0)\}$ é uma base do espaço das colunas de A .

21. Considere o seguinte subespaço de \mathbb{R}^4 : $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0\}$.

a) Determine uma base para U .

b) Determine uma base para U que inclua os vectores $(1, -1, -1, 1)$ e $(-1, 0, 0, 1)$.

22. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sejam $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{L}(A)$, $\mathcal{C}(A)$, respectivamente, núcleo, espaço das linhas e espaço das colunas de A .

a) Determine uma base para $\mathcal{N}(A)$.

b) Determine uma base para \mathbb{R}^3 que inclua duas colunas de A .

c) Determine uma base para $\mathcal{L}(A) \cap \mathcal{C}(A)$.

23. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 4 & a & b \\ c & d & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R}).$$

Determine a, b, c, d tais que $\text{nul } A = 2$ e $(1, 0, 2) \in \mathcal{L}(A)$.

24. Seja U o subespaço de \mathbb{R}^4 gerado por $\{(1, 1, 0, -1), (1, 1, 0, 1)\}$ e considere ainda o seguinte subespaço de \mathbb{R}^4 : $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : y = w\}$.

a) Determine uma base para \mathbb{R}^4 que inclua dois vectores de U .

b) Sendo $\mathcal{B} = \{(2, 2, 0, 0), (1, 1, 0, 1)\}$ uma base ordenada de U , calcule as coordenadas do vector $(1, 1, 0, -7)$ em relação a \mathcal{B} .

c) Determine uma base para $U + V$ e uma base para $U \cap V$, indicando as respectivas dimensões.

25. Considere o seguinte subespaço linear de \mathcal{P}_2 : $V = L(\{1 - t, 1 - t^2\})$. Sejam \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 duas bases ordenadas de V , com $\mathcal{B}_1 = \{1 - t, 1 - t^2\}$. Considere ainda a matriz de mudança de base de \mathcal{B}_1 para \mathcal{B}_2 dada por:

$$S_{\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Determine as coordenadas do vector $1 - t$ em \mathcal{B}_2 .

26. Sejam A e B matrizes do tipo $n \times n$ tais que $AB = BA$. Mostre que

$$\text{car}(A + B) + \text{car}(AB) \leq \text{car}(A) + \text{car}(B).$$