Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

10 de Janeiro de 2003
Duração: 3 h.

Resolução do 1° EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: Lic. Eng. Geológica e Mineira, Lic. Eng. de Materiais e Lic. Eng. Mecânica

I (4 val.)

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha \\ -1 & -\alpha & 1 & -\alpha \end{bmatrix} \underset{\substack{-L_1+L_2\to L_2 \\ L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & -1 & -1 \\ 0 & -\alpha-1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha-1 \end{bmatrix}.$$

a) Se $\alpha = -1$ então car $A_\alpha = 2$. Se $\alpha = 0$ então car $A_\alpha = 3$. Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq -1$ então car $A_\alpha = 4$. Por outro lado, temos:

$$\text{car } A_\alpha + \text{nul } A_\alpha = 4 \quad (= \text{n}^o \text{ de colunas de } A_\alpha).$$

Logo, Se $\alpha = -1$ então nul $A_\alpha = 2$. Se $\alpha = 0$ então nul $A_\alpha = 1$. Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq -1$ então nul $A_\alpha = 0$.

b) A_α é invertível se e só se $\det A_\alpha \neq 0$. Como $\det A_\alpha = \alpha(\alpha+1)^2$ então A_α é invertível se e só se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq -1$.

c) Para $\alpha = -1$, temos:

$$A_{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{-L_1+L_2\to L_2 \\ L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U'.$$

O conjunto $\{(1,1,0,-1),(-1,0,-1,1)\}$ é uma base para $\mathcal{C}(A_{-1})$ pois é constituído pelas colunas de A_{-1} que correspondem às colunas de U' que contêm os pivots.

Temos:

$$\mathcal{N}(A_{-1}) = \left\{u \in \mathbb{R}^4 : A_{-1}u = \mathbf{0}\right\}.$$

Seja $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$.

$$A_{-1}u = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(Método de eliminação de Gauss).}$$

$$\begin{cases} u_1 - u_2 - u_3 - u_4 = 0 \\ \\ u_3 + u_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = u_2 \\ u_3 = -u_4. \end{cases}$$

Logo,

$$\mathcal{N}(A_{-1}) = \{(u_2, u_2, -u_4, u_4) : u_2, u_4 \in \mathbb{R}\} = L(\{(1,1,0,0),(0,0,-1,1)\}).$$

O conjunto $\{(1,1,0,0),(0,0,-1,1)\}$ é uma base para $\mathcal{N}(A_{-1})$ pois gera $\mathcal{N}(A_{-1})$ e é linearmente independente.

d) Seja $u=(u_1,u_2,u_3,u_4)$.

$$A_{-1}u=b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

A solução geral de $A_{-1}u=b$ é dada por:

$$(\text{Solução particular de } A_2u=b)+(\text{Solução geral de } A_2u=\mathbf{0}).$$

O vector $(2,0,0,0)$ é uma solução particular de $A_{-1}u=b$. Logo, atendendo à alínea anterior, a solução geral de $A_{-1}u=b$ é dada por:

$$u=(2,0,0,0)+\lambda_1(1,1,0,0)+\lambda_2(0,0,-1,1), \ \ (\text{com } \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}).$$

Obs. Esta alínea podia ter sido resolvida directamente sem usar **c).**

II (4 val.)

Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Considere tambem os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$:

$$U=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : 2x+y-z=0\right\} \ \text{ e } \ V=L\left(\{(0,1,1,0)\}\right).$$

a) Seja $(x,y,z,w)\in U$. Logo, temos $z=2x+y$, e assim

$$(x,y,2x+y,w)=x(1,0,2,0)+y(0,1,1,0)+w(0,0,0,1).$$

O conjunto $\{(1,0,2,0),(0,1,1,0),(0,0,0,1)\}$ é uma base para U pois gera U e é linearmente independente. Logo, $\dim U=3$. O conjunto $\{(0,1,1,0)\}$ é uma base para V pois gera V e é linearmente independente. Logo, $\dim V=1$. Temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[-L_2+L_4\to L_4]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$U+V=L\left(U\cup V\right)=L\left(\{(1,0,2,0),(0,1,1,0),(0,0,0,1)\}\right).$$

O conjunto $\{(1,0,2,0),(0,1,1,0),(0,0,0,1)\}$ é uma base para $U+V$ pois gera $U+V$ e é linearmente independente. Logo, $\dim U+V=3$. Como

$$\dim(U\cap V)=\dim U+\dim V-\dim(U+V),$$

então $\dim(U\cap V)=1$.

b) Já vimos que

$$U=L\left(\{\{(1,0,2,0),(0,1,1,0),(0,0,0,1)\}\}\right).$$

Aplicando o método de ortogonalização de Gram-Schmidt, sejam

$$v_1 = (1,0,2,0), \quad v_2 = (0,1,1,0) - Proj_{v_1}(0,1,1,0)$$

e

$$v_3 = (0,0,0,1) - Proj_{v_1}(0,0,0,1) - Proj_{v_2}(0,0,0,1).$$

Atendendo a que o produto interno que estamos a considerar em $\mathbb{R}^4$ é o usual, temos então:

$$\begin{aligned} v_2 &= (0,1,1,0) - Proj_{v_1}(0,1,1,0) = \\ &= (0,1,1,0) - \frac{\langle (0,1,1,0),(1,0,2,0)\rangle}{\|(1,0,2,0)\|^2}(1,0,2,0) = \\ &= (0,1,1,0) - \frac{(2,0,4,0)}{5} = \left(-\frac{2}{5},1,\frac{1}{5},0\right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} v_3 &= (0,0,0,1) - Proj_{v_1}(0,0,0,1) - Proj_{v_2}(0,0,0,1) = \\ &= (0,0,0,1) - \frac{\langle (0,0,0,1),(1,0,2,0)\rangle}{\|(1,0,2,0)\|^2}(1,0,2,0) - \frac{\left\langle (0,0,0,1),\left(-\frac{2}{5},1,\frac{1}{5},0\right)\right\rangle}{\left\|\left(-\frac{2}{5},1,\frac{1}{5},0\right)\right\|^2}\left(-\frac{2}{5},1,\frac{1}{5},0\right) = \\ &= (0,0,0,1). \end{aligned}$$

Logo, o conjunto

$$\{v_1,v_2,v_3\} = \left\{(1,0,2,0),\left(-\frac{2}{5},1,\frac{1}{5},0\right),(0,0,0,1)\right\}$$

é uma base ortogonal de U.

Por outro lado, atendendo a que o produto interno que estamos a considerar em $\mathbb{R}^4$ é o usual, temos:

$$U = \left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : 2x+y-z=0\right\} = \left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : \langle (x,y,z,w),(2,1,-1,0)\rangle = 0\right\}.$$

Logo,

$$U = \left(L\left(\{(2,1,-1,0)\}\right)\right)^{\perp}$$

e assim,

$$U^{\perp} = \left(L\left(\{(2,1,-1,0)\}\right)\right)^{\perp\perp} = L\left(\{(2,1,-1,0)\}\right).$$

Deste modo, o conjunto

$$\left\{\frac{(2,1,-1,0)}{\|(2,1,-1,0)\|}\right\} = \left\{\left(\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},0\right)\right\} = \left\{\left(\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6},0\right)\right\}$$

é uma base ortonormada de $U^{\perp}$.

c) A projecção ortogonal de $(1,0,1,0)$ sobre $U^{\perp}$ é dada por:

$$P_{U^{\perp}}(1,0,1,0) = \frac{\langle (1,0,1,0),(2,1,-1,0)\rangle}{\|(2,1,-1,0)\|^2}(2,1,-1,0) = \frac{1}{6}(2,1,-1,0) = \left(\frac{1}{3},\frac{1}{6},-\frac{1}{6},0\right).$$

d) Escolhendo um ponto de U, por exemplo $(1,0,2,0)$, temos que a distância de $(0,0,1,0)$ a U é dada por:

$$d((0,0,1,0),U) = \|P_{U^\perp}((1,0,2,0)-(0,0,1,0))\| = \|P_{U^\perp}(1,0,1,0)\| = \left\|\left(\frac{1}{3},\frac{1}{6},-\frac{1}{6},0\right)\right\| = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

III (4 val.)

Temos:

$$T(x,y,z,w) = (w+2x-y, -w+2y, 4y-2w).$$

Logo,

$$\begin{aligned} T(1,0,0,0) &= (2,0,0), \quad T(0,1,0,0) = (-1,2,4), \\ T(0,0,1,0) &= (0,0,0), \quad T(0,0,0,1) = (1,-1,-2), \end{aligned}$$

e assim,

$$M(T;\mathcal{B}_c^4;\mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

b) Seja $B = M(T;\mathcal{B}_c^4;\mathcal{B}_c^3)$. Uma vez que a matriz B representa T em relação às bases canónicas $\mathcal{B}_c^4$ e $\mathcal{B}_c^3$ de $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$ respectivamente, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(T) &= \mathcal{N}(B) = \left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : w=2y \ \text{ e } \ x=-\frac{1}{2}y\right\} = \\ &= L\left(\left\{\left(-\frac{1}{2},1,0,2\right),(0,0,1,0)\right\}\right). \end{aligned}$$

O conjunto $\left\{\left(-\frac{1}{2},1,0,2\right),(0,0,1,0)\right\}$ é uma base para $\mathcal{N}(T)$ pois gera $\mathcal{N}(T)$ e é linearmente independente. Logo, $\dim\mathcal{N}(T)=2$. Como $\dim\mathcal{N}(T)\neq 0$ então T não é injectiva.

c) Seja $B = M(T;\mathcal{B}_c^4;\mathcal{B}_c^3)$. Uma vez que a matriz B representa T em relação às bases canónicas $\mathcal{B}_c^4$ e $\mathcal{B}_c^3$ de $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$ respectivamente, temos:

$$\mathcal{I}(T) = \mathcal{C}(B),$$

onde $\mathcal{C}(B)$ é o espaço das colunas de B. Como

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \underset{-2L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U',$$

o conjunto $\{(2,0,0),(-1,2,4)\}$ é uma base para $\mathcal{C}(B)$ pois é constituído pelas colunas de B que correspondem às colunas de U' que contêm os pivots. Logo, o conjunto $\{(2,0,0),(-1,2,4)\}$ é uma base para $\mathcal{I}(T)$. Como $\dim\mathcal{I}(T)=2\neq 3=\dim\mathbb{R}^3$ então T não é sobrejectiva.

d) A solução geral da equação $T(x,y,z,w)=(1,-2,-4)$ é dada por:

(Solução particular de $T(x,y,z,w)=(1,-2,-4)$)+(Solução geral de $T(x,y,z,w)=(0,0,0)$).

O vector $(0,-1,0,0)$ é uma solução particular de $T(x,y,z,w)=(1,-2,-4)$. Logo, atendendo à alínea anterior, a solução geral de $T(x,y,z,w)=(1,-2,-4)$ é dada por:

$$(x,y,z,w)=(0,-1,0,0)+\lambda_1\left(-\frac{1}{2},1,0,2\right)+\lambda_2(0,0,1,0),\ \ (\text{com } \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}).$$

Obs. Esta alínea podia ter sido resolvida directamente sem usar **c).**

IV (3 val.)

Seja P_1 o espaço linear de todos os polinómios reais de grau menor ou igual a 1, munido das operações usuais. Sejam $\mathcal{S}_1=\{1-2t,t\}$ e $\mathcal{S}_2=\{1+t,2-t\}$ duas bases (ordenadas) de P_1.

a) Determinando os valores de a_1,a_2,a_3,a_4 tais que

$$1+t=a_1(1-2t)+a_2t$$

e

$$2-t=a_3(1-2t)+a_4t,$$

vamos ter

$$S_{\mathcal{S}_1\to\mathcal{S}_2}=\begin{bmatrix} a_1 & a_3\\ a_2 & a_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2\\ 3 & 3\end{bmatrix}.$$

b) Como as coordenadas de $p(t)\in P_1$ em relação à base $\mathcal{S}_2$ são dadas por $(1,1)$, então usando a alínea anterior, as coordenadas de $p(t)\in P_1$ em relação à base $\mathcal{S}_1$ são dadas por

$$\begin{bmatrix} 1 & 2\\ 3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3\\ 6\end{bmatrix}.$$

Obs. Esta alínea podia ter sido resolvida directamente sem usar a alínea anterior**,** uma vez que sendo $(1,1)$ as coordenadas de $p(t)$ em relação à base $\mathcal{S}_2$ se tem desde logo:

$$p(t)=1(1+t)+1(2-t)=3.$$

Bastaria então determinar os valores de α,β tais que

$$3=\alpha(1-2t)+\beta t$$

para termos as coordenadas (α,β) de $p(t)$ em relação à base $\mathcal{S}_1$.

c) Atendendo a alínea anterior temos:

$$S_{\mathcal{S}_2\to\mathcal{S}_1}=(S_{\mathcal{S}_1\to\mathcal{S}_2})^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 2\\ 3 & 3\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & \frac{2}{3}\\ 1 & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}.$$

Obs. Esta alínea podia ter sido resolvida directamente sem usar a alínea anterior**,** determinando os valores de b_1,b_2,b_3,b_4 tais que

$$1-2t=b_1(1+t)+b_2(2-t)$$

e

$$t=b_3(1+t)+b_4(2-t).$$

Tendo-se assim,

$$S_{\mathcal{S}_2 \to \mathcal{S}_1} = \begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

V (3 val.)

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ é representada pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

a) Os valores próprios são os valores de λ para os quais:

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Temos:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & 2 & -3-\lambda \end{bmatrix} = \\ &= (-1-\lambda)\left[(2-\lambda)(-3-\lambda) - (-2)2\right] = \\ &= (-1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 2). \end{aligned}$$

Logo,

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (-1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 2) \Leftrightarrow (\lambda = -1 \ \text{ ou } \ \lambda = 1 \ \text{ ou } \ \lambda = -2).$$

Os valores próprios de T são: $-1, 1$ e -2.

O subespaço próprio associado ao valor próprio -1 é dado por:

$$\mathcal{N}(A - (-1)I) = L\left(\{(1,0,0)\}\right).$$

O subespaço próprio associado ao valor próprio 1 é dado por:

$$\mathcal{N}(A - I) = L\left(\{(0,2,1)\}\right).$$

O subespaço próprio associado ao valor próprio -2 é dado por:

$$\mathcal{N}(A - (-2)I) = L\left(\{(0,1,2)\}\right).$$

b) A matriz A do tipo 3×3 é diagonalizável uma vez que temos três valores próprios distintos. Com:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

temos que a matriz $S^{-1}AS$ é diagonal.

Obs. Na verdade:

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

c) A matriz A é invertível uma vez que $\det A = 2 \neq 0$. A entrada $(1,1)$ da matriz inversa A^{-1} é dada por:

$$\left(A^{-1}\right)_{11} = \left(\frac{(\text{cof } A)^T}{|A|}\right)_{11} = \frac{(\text{cof } A)_{11}}{|A|} = \frac{-2}{2} = -1.$$

VI (2 val.)

a) Seja A uma matriz do tipo $n \times n$. Temos:

$$A^k - \lambda^k I = (A - \lambda I)(A^{k-1} + A^{k-2}\lambda + \cdots + A\lambda^{k-2} + \lambda^{k-1} I).$$

Logo, se λ é um valor próprio de A então λ^k é um valor próprio de A^k, onde k é um inteiro positivo.

b) Seja A uma matriz nilpotente do tipo $n \times n$. Temos então $A^l = 0$ para algum inteiro positivo l. Seja λ um valor próprio de A. Pela alínea anterior, λ^l é um valor próprio de A^l. Como $A^l = 0$, temos:

$$0 = \det(A^l - \lambda^l I) = \det(-\lambda^l I) = (-1)^n \lambda^l.$$

Logo $\lambda = 0$ e como tal, 0 é o único valor próprio de A.