Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

8 de Novembro de 2002
Duração: 1h e 30 min.
Teste A

Resolução do 1° TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: Lic. Eng. Geológica e Mineira, Lic. Eng. de Materiais e Lic. Eng. Mecânica

I (9 val.)

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & \alpha & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{3L_1+L_3\to L_3 \\ -L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+3 & 3\alpha \\ 0 & -1 & 0 & 2-\alpha \end{bmatrix} \underset{L_2+L_4\to L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+3 & 3\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 2-\alpha \end{bmatrix}$$

a) Se $\alpha = 2$ ou $\alpha = -3$ então car $A_\alpha = 3$. Se $\alpha \neq 2$ e $\alpha \neq -3$ então car $A_\alpha = 4$. Sabe-se que:

$$\text{car } A_\alpha + \text{nul } A_\alpha = 4 \quad (= \text{n}^o \text{ de colunas de } A_\alpha).$$

Logo, se $\alpha = 2$ ou $\alpha = -3$ então nul $A_\alpha = 1$. Se $\alpha \neq 2$ e $\alpha \neq -3$ então nul $A_\alpha = 0$.

A característica de A_α é igual à dimensão do espaço das linhas de A_α que por sua vez é igual à dimensão do espaço das colunas de A_α:

$$\text{car } A_\alpha = \dim \mathcal{L}(A_\alpha) = \dim \mathcal{C}(A_\alpha).$$

Logo, se $\alpha = 2$ ou $\alpha = -3$ então $\dim \mathcal{C}(A_\alpha) = 3$. Se $\alpha \neq 2$ e $\alpha \neq -3$ então $\dim \mathcal{C}(A_\alpha) = 4$.

b) A_α é invertível se e só se $\det A_\alpha \neq 0$. Mas, $\det A_\alpha = (\alpha+3)(\alpha-2)$. Logo, A_α é invertível se e só se $\alpha \neq 2$ e $\alpha \neq -3$. A entrada (2,2) da matriz inversa A_α^{-1} é dada por:

$$\left(A_\alpha^{-1}\right)_{22} = \left(\frac{(\text{cof } A_\alpha)^T}{|A_\alpha|}\right)_{22} = \frac{(\text{cof } A_\alpha)_{22}}{|A_\alpha|} = \frac{(\alpha+3)(\alpha-2)}{(\alpha+3)(\alpha-2)} = 1.$$

c) Para $\alpha = -1$, $A_{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

$$\text{Com } E_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ tem-se } E_{31}A_{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Com } E_{41} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ tem-se } E_{41}E_{31}A_{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Com } E_{42} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ tem-se } E_{42}E_{41}E_{31}A_{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = U'.$$

Logo, com

$$L = E_{31}^{-1}E_{41}^{-1}E_{42}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e como } U^{'} = DU = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tem-se

$$A_{-1} = LDU$$

com

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e } U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

d)

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{3L_1+L_3\to L_3 \\ -L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_2+L_4\to L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U^{'}.$$

Base para $\mathcal{C}(A_2)$: $\{(-1,0,3,-1),(0,1,0,-1),(1,0,2,1)\}$, pois são as colunas de A_2 que correspondem às colunas de $U^{'}$ que contêm os pivots.

$$\mathcal{N}(A_2) = \left\{u \in \mathbb{R}^4 : A_2 u = \mathbf{0}\right\}.$$

$$A_2 u = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad \text{(Método de eliminação de Gauss).}$$

$$\begin{cases} -u_1 + u_3 + 2u_4 = 0 \\ u_2 = 0 \\ 5u_3 + 6u_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{4}{5}u_4 \\ u_3 = -\frac{6}{5}u_4. \end{cases}$$

Logo

$$\mathcal{N}(A_2) = \left\{(\frac{4}{5}u_4, 0, -\frac{6}{5}u_4, u_4) : u_4 \in \mathbb{R}\right\} = L(\left\{(\frac{4}{5}, 0, -\frac{6}{5}, 1)\right\}).$$

Base para $\mathcal{N}(A_2)$: $\left\{(\frac{4}{5}, 0, -\frac{6}{5}, 1)\right\}$.

e)

$$A_2 u = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Solução geral de $A_2 u = b$ é igual a:

$$(\text{Solução particular de } A_2 u = b) + (\text{Solução geral de } A_2 u = \mathbf{0}).$$

O vector $(0,0,1,0)$ é uma solução particular de $A_2u = b$. Logo, atendendo à alínea anterior, a solução geral de $A_2u = b$ é:

$$u = (0,0,1,0) + \lambda(\frac{4}{5}, 0, -\frac{6}{5}, 1), \ \ (\text{com } \lambda \in \mathbb{R}).$$

II (4 val.)

Seja P_2 o espaço linear de todos os polinómios reais de grau menor ou igual a 2, munido das operações usuais.

Seja $W = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 \in P_2 : 2a_0 - a_1 = 3a_2\}$.

a) $W \neq \emptyset$ e $W \subseteq P_2$. Sejam $u, v \in W$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} u &= b_0 + b_1t + b_2t^2 \ \text{ com } \ 2b_0 - b_1 = 3b_2; \ \ b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}. \\ v &= c_0 + c_1t + c_2t^2 \ \text{ com } \ 2c_0 - c_1 = 3c_2; \ \ c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Logo,

$$u + v = b_0 + c_0 + (b_1 + c_1)t + (b_2 + c_2)t^2 \in W,$$

pois $2(b_0 + c_0) - (b_1 + c_1) = 3(b_2 + c_2)$. E

$$\lambda u = \lambda b_0 + (\lambda b_1)t + (\lambda b_2)t^2 \in W,$$

pois $2(\lambda b_0) - (\lambda b_1) = 3(\lambda b_2)$. Logo W é um subespaço de P_2.

b) Seja $q(t) \in W$. Tem-se então:

$$q(t) = a_0 + (2a_0 - 3a_2)t + a_2t^2 = a_0(1 + 2t) + a_2(-3t + t^2), \ \ \text{com } a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

O conjunto $S = \{1 + 2t, -3t + t^2\}$ é uma base para W pois gera W e é linearmente independente. Logo $\dim W = 2$.

As coordenadas do vector $p(t) = 3 + 2t^2$ na base S são $(3, 2)$ pois:

$$p(t) = 3 + 2t^2 = 3(1 + 2t) + 2(-3t + t^2).$$

III (4 val.)

Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:

$U = L(\{(2,-1,1), (-2,1,1)\})$ e $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = -2y\}$.

a) Temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_1+L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Logo, o conjunto $\{(2,-1,1), (0,0,2)\}$ é uma base para U pois gera U e é linearmente independente. Logo, $\dim U = 2$.

Uma base para V:

$$u = (x,y,z) \in V \Leftrightarrow u = (-2y, y, z),$$

e

$$(-2y, y, z) = y(-2,1,0) + z(0,0,1), \quad \text{com} \quad y, z \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$V = \{(-2y, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} = L(\{(-2,1,0), (0,0,1)\}).$$

Uma base para V pode ser então: $\{(-2,1,0),(0,0,1)\}$, pois gera V e é linearmente independente. Logo, $\dim V = 2$.

b) Por definição $U+V = L\left(U \cup V\right)$. E

$$L\left(U \cup V\right) = L\left(\{(2,-1,1),(0,0,2),(-2,1,0),(0,0,1)\}\right).$$

Colocando os vectores do conjunto $U \cup V$ como linhas de uma matriz A, temos $U+V = \mathcal{L}(A)$ e:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_1+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{-\frac{1}{2}L_2+L_3 \to L_3 \\ -\frac{1}{2}L_2+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, $\{(2,-1,1),(0,0,2)\}$ é uma base para $U+V$ por serem as linhas não nulas da matriz em escada de linhas obtida de A através do método de eliminação de Gauss. Pelo que, $\dim(U+V) = 2$. E como

$$\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U+V),$$

tem-se $\dim(U \cap V) = 2$.

Nota: Observe que neste exercício concreto (grupo III) tem-se as seguintes igualdades:

$$U = V = U \cap V = U \cup V$$

as quais, em geral, não acontecem.

IV (3 val.)

a) Sejam V um espaço linear e $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

($\Rightarrow$) Suponhamos que S é uma base de V. Queremos provar que todo o vector de V se escreve de maneira única como combinação linear dos elementos de S. Assim, seja v um vector qualquer de V. Como S é uma base de V, então em particular gera V. Pelo que, existem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

Suponhamos que também existiam $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$v = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_n v_n.$$

Logo,

$$(\lambda_1 - \mu_1)v_1 + (\lambda_2 - \mu_2)v_2 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)v_n = \mathbf{0}.$$

Como $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é um conjunto linearmente independente (por ser base), então temos

$$\lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \ldots, \lambda_n = \mu_n.$$

Logo, conclui-se que todo o vector de V se escreve de maneira única como combinação linear dos elementos de S.

($\Leftarrow$) Suponhamos agora que todo o vector de V se escreve de maneira única como combinação linear dos elementos de S. Queremos provar que $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de V. Como todo o vector de V se escreve como combinação linear dos elementos de S, então

S gera V. Falta ver que S é linearmente independente. Assim, sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = \mathbf{0}.$$

Como

$$\mathbf{0} = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n,$$

e uma vez que por hipótese todo o vector de V se escreve de maneira **única** como combinação linear dos elementos de S, conclui-se que

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Logo, $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de V. Fica assim provada a equivalência referida na questão.

b) Seja $\{v_1, v_2\}$ uma base de um espaço linear U. Considere os vectores $w_1 = av_1 + bv_2$ e $w_2 = cv_1 + dv_2$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Queremos provar que $\{w_1, w_2\}$ é também uma base de U se e só se $ad \neq bc$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $ad \neq bc$. Vejamos que $\{w_1, w_2\}$ é uma base de U. Vamos começar por verificar que o conjunto $\{w_1, w_2\}$ é linearmente independente. Sejam $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \mathbf{0}.$$

Queremos ver que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Observe-se que

$$\begin{aligned} \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 &= \lambda_1(av_1 + bv_2) + \lambda_2(cv_1 + dv_2) \\ &= (\lambda_1 a + \lambda_2 c)v_1 + (\lambda_1 b + \lambda_2 d)v_2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\lambda_1 a + \lambda_2 c)v_1 + (\lambda_1 b + \lambda_2 d)v_2 = \mathbf{0}.$$

Como o conjunto $\{v_1, v_2\}$ é uma base de U, em particular é linearmente independente. Logo,

$$\lambda_1 a + \lambda_2 c = \lambda_1 b + \lambda_2 d = 0 \in \mathbb{R}.$$

Isto é,

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ou seja,

$$A\lambda = \mathbf{0},$$

onde $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Como $ad \neq bc$ e $\det A = ad - bc$, então $\det A \neq 0$, isto é, A é invertível e como tal:

$$\begin{aligned} A^{-1}A\lambda &= A^{-1}\mathbf{0} \Leftrightarrow \\ I\lambda &= \mathbf{0} \Leftrightarrow \\ \lambda &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Logo, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ e deste modo o conjunto $\{w_1, w_2\}$ é linearmente independente. Como $\dim U = 2$ e como w_1, w_2 são dois vectores de U, linearmente independentes, então conclui-se

que $\{w_1, w_2\}$ é uma base de U (não sendo necessário verificar se o conjunto $\{w_1, w_2\}$ gera U).

($\Rightarrow$) Reciprocamente, se $\{w_1, w_2\}$ é uma base de U, em particular é linearmente independente, e como tal tem-se

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Isto é, a equação

$$A\lambda = \mathbf{0},$$

onde $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, tem como solução única $\lambda = \mathbf{0}$. O que é equivalente a ter-se $\det A \neq 0$, isto é, $ad \neq bc$.