Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

22 de Junho de 2009
Duração: 3 h.

Resolução do 1º EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: LEMat, LEAN, MEAer, MEBiol, MEMec e MEQ

I (6 val.)

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -\alpha^2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1+L_3\to L_3 \\ 2L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha^2 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha-2 \end{bmatrix}.$$

(1.2) **a)** Se $\alpha = 1$ então car $A_\alpha = 2$. Se $\alpha = -1$ então car $A_\alpha = 3$. Se $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -1$ então car $A_\alpha = 4$. Por outro lado, tem-se:

$$\text{car } A_\alpha + \text{nul } A_\alpha = 4 \;\; (= \text{n}^o \text{ de colunas de } A_\alpha).$$

Logo, se $\alpha = 1$ então nul $A_\alpha = 2$; se $\alpha = -1$ então nul $A_\alpha = 1$; se $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -1$ então nul $A_\alpha = 0$.

(1.2) **b)** Para $\alpha = 1$, tem-se:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U'.$$

O conjunto $\{(-1,0,1,2),(0,1,0,0)\}$ é uma base para $\mathcal{C}(A_1)$ pois é constituído pelas colunas de A_1 que correspondem às colunas de U' que contêm os pivots.

Tem-se:

$$\mathcal{N}(A_1) = \left\{u \in \mathbb{R}^4 : A_1 u = \mathbf{0}\right\}.$$

Seja $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$.

$$A_1 u = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(Método de eliminação de Gauss).}$$

$$\begin{cases} -u_1 + u_3 + u_4 = 0 \\ \\ u_2 - u_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = u_3 + u_4 \\ u_2 = u_3. \end{cases}$$

Logo,

$$\mathcal{N}(A_1) = \{(u_3+u_4, u_3, u_3, u_4) : u_3, u_4 \in \mathbb{R}\} = L(\{(1,1,1,0),(1,0,0,1)\}).$$

O conjunto $\{(1,1,1,0),(1,0,0,1)\}$ é uma base para $\mathcal{N}(A_1)$ pois gera $\mathcal{N}(A_1)$ e é linearmente independente.

(1.2) **c)** A_α é invertível se e só se $\det A_\alpha \neq 0$. Como $\det A_\alpha = 2(\alpha-1)^2(\alpha+1)$ então A_α é invertível se e só se $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -1$.

Para $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -1$, a entrada $(2,4)$ da matriz inversa $(A_\alpha)^{-1}$ é dada por:

$$\begin{aligned}
\left((A_\alpha)^{-1}\right)_{(2,4)} &= \left(\frac{(\text{cof } A_\alpha)^T}{|A_\alpha|}\right)_{(2,4)} = \frac{(\text{cof } A_\alpha)_{(4,2)}}{|A_\alpha|} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & \alpha \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -\alpha^2 & -1 \end{vmatrix}}{2(\alpha-1)^2(\alpha+1)} = \\
&= \frac{(-1)\begin{vmatrix} -1 & \alpha \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{2(\alpha-1)^2(\alpha+1)} = \frac{\alpha-1}{2(\alpha-1)^2(\alpha+1)} = \frac{1}{2(\alpha^2-1)}.
\end{aligned}$$

(1.2) **d)** Seja $\alpha = 2$. Com $E_{13}(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $E_{14}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ tem-se

$$E_{14}(2)E_{13}(1)A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$A_2 = LDU, \quad \text{com} \quad L = (E_{13}(1))^{-1}(E_{14}(2))^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(1.2) **e)** Seja $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

$$A_1 x = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

A solução geral de $A_1 x = b$ é dada por:

$$(\text{Solução particular de } A_1x = b) + (\text{Solução geral de } A_1 x = \mathbf{0}).$$

O vector $(0,0,0,1)$ é uma solução particular de $A_1 x = b$. Logo, atendendo à alínea **b)**, a solução geral de $A_1 x = b$ é dada por:

$$\{(0,0,0,1)\} + \mathcal{N}(A_1) = \{(0,0,0,1) + r(1,1,1,0) + s(1,0,0,1) : r, s \in \mathbb{R}\}.$$

Obs. Esta alínea podia ter sido resolvida directamente sem usar **b).**

II (6 val.)

Considere a transformação linear $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T_1(x, y, z) = (2x + y, y + 2z)$. Considere ainda a transformação linear $T_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuja representação matricial em relação à base (ordenada) $\mathcal{S} = \{(2, 1), (1, 2)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e à base canónica $\mathcal{B}_c^3$ de $\mathbb{R}^3$ é dada pela matriz $M(T_2; \mathcal{S}; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(1.2) **a)**

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(T_1) &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : T_1(x, y, z) = (0, 0)\right\} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (2x + y, y + 2z) = (0, 0)\right\} = \\ &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z = -\frac{y}{2}\right\} = \left\{\left(-\frac{y}{2}, y, -\frac{y}{2}\right) : y \in \mathbb{R}\right\} = L\left(\{(1, -2, 1)\}\right). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(1, -2, 1)\}$ gera $\mathcal{N}(T_1)$ e é linearmente independente, logo é uma base de $\mathcal{N}(T_1)$. Tem-se

$$\dim \mathcal{N}(T_1) = 1 \quad \text{e} \quad \dim \mathcal{N}(T_1) + \dim \mathcal{I}(T_1) = \dim \mathbb{R}^3,$$

e assim $\dim \mathcal{I}(T_1) = 2$. Logo, como $\mathcal{I}(T_1)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^2$ e $\dim \mathcal{I}(T_1) = \dim \mathbb{R}^2 = 2$, então $\mathcal{I}(T_1) = \mathbb{R}^2$ e assim, T_1 é sobrejectiva.

(1.2) **b)** Como $\mathcal{S} = \{(2, 1), (1, 2)\}$ gera o "espaço de partida" $\mathbb{R}^2$, tem-se

$$\mathcal{I}(T_2) = L\left(\{T_2(2, 1), T_2(1, 2)\}\right) = L\left(\{(2, 1, 1), (1, 1, 2)\}\right).$$

Como o conjunto $\{(2, 1, 1), (1, 1, 2)\}$ gera $\mathcal{I}(T_2)$ e é linearmente independente, então é uma base de $\mathcal{I}(T_2)$.

Tem-se

$$\dim \mathcal{I}(T_2) = 2 \quad \text{e} \quad \dim \mathcal{N}(T_2) + \dim \mathcal{I}(T_2) = \dim \mathbb{R}^2,$$

e assim $\dim \mathcal{N}(T_2) = 0$. Logo, T_2 é injectiva.

(1.2) **c)** Tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{-2L_1+L_2 \to L_2 \\ -L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \underset{-\frac{3}{5}L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} \end{bmatrix}$$

logo o conjunto $\{(1, -2, 1), (2, 1, 1), (1, 1, 2)\}$ gera $\mathcal{N}(T_1) + \mathcal{I}(T_2)$ e é linearmente independente, então é uma base de $\mathcal{N}(T_1) + \mathcal{I}(T_2)$.

Logo, como $\mathcal{N}(T_1) + \mathcal{I}(T_2)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ e $\dim\left(\mathcal{N}(T_1) + \mathcal{I}(T_2)\right) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$, então $\mathcal{N}(T_1) + \mathcal{I}(T_2) = \mathbb{R}^3$.

Tem-se

$$\dim\left(\mathcal{N}(T_1) \cap \mathcal{I}(T_2)\right) = \dim \mathcal{N}(T_1) + \dim \mathcal{I}(T_2) - \dim\left(\mathcal{N}(T_1) + \mathcal{I}(T_2)\right) = 1 + 2 - 3 = 0.$$

(1.2) **d)** Como $(1, 0) = \frac{2}{3}(2, 1) - \frac{1}{3}(1, 2)$ e $(0, 1) = -\frac{1}{3}(2, 1) + \frac{2}{3}(1, 2)$, tem-se

$$\begin{aligned} T_2(1, 0) &= T_2\left(\frac{2}{3}(2, 1) - \frac{1}{3}(1, 2)\right) \underset{T \text{ é linear}}{=} \frac{2}{3}T_2(2, 1) - \frac{1}{3}T_2(1, 2) = \\ &= \frac{2}{3}(2, 1, 1) - \frac{1}{3}(1, 1, 2) = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \left(1, \frac{1}{3}, 0\right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T_2(0,1) &= T_2\left(-\frac{1}{3}(2,1)+\frac{2}{3}(1,2)\right) \underset{T \text{ é linear}}{=} -\frac{1}{3}T_2(2,1)+\frac{2}{3}T_2(1,2) = \\ &= -\frac{1}{3}\left(2,1,1\right)+\frac{2}{3}\left(1,1,2\right) = \left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right) = \left(0,\frac{1}{3},1\right) \end{aligned}$$

Logo, a matriz $M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^3)$ que representa T_2 em relação às bases canónicas $\mathcal{B}_c^2$ e $\mathcal{B}_c^3$ de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ respectivamente, é dada por

$$M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(1.2) **e)** A matriz $M(T_1;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2)$ que representa T_1 em relação às bases canónicas $\mathcal{B}_c^3$ e $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ respectivamente, é dada por

$$M(T_1;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

uma vez que

$$T_1(1,0,0)=(2,0), \quad T_1(0,1,0)=(1,1) \quad \text{e} \quad T_1(0,0,1)=(0,2).$$

Logo, a matriz que representa $T_1 \circ T_2$ em relação à base canónica $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^2$ é dada por

$$M(T_1\circ T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2) = M(T_1;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2)M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/3 & 1/3 \\ 1/3 & 7/3 \end{bmatrix}.$$

Logo, tem-se

$$\left(T_1\circ T_2\right)(x,y) = \begin{bmatrix} 7/3 & 1/3 \\ 1/3 & 7/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Assim, como a matriz $\begin{bmatrix} 7/3 & 1/3 \\ 1/3 & 7/3 \end{bmatrix}$ é invertível, a solução geral da equação $\left(T_1\circ T_2\right)(x,y) = \begin{bmatrix} 8/3 \\ 8/3 \end{bmatrix}$, é dada

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/3 & 1/3 \\ 1/3 & 7/3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 8/3 \\ 8/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/16 & -1/16 \\ -1/16 & 7/16 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8/3 \\ 8/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

III (6 val.)

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e considere o produto interno usual. Sejam $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{C}(A)$ e $\mathcal{L}(A)$ respectivamente o núcleo, espaço das colunas e espaço das linhas de A.

(1.2) **a)** Tem-se $(\mathcal{N}(A))^\perp = \mathcal{L}(A)$. O conjunto $\{(1,0,1),(0,2,0)\}$ é uma base para $\mathcal{N}(A)$ pois gera $\mathcal{N}(A)$ e é linearmente independente. Como $\langle (1,0,1),(0,2,0)\rangle = 0$, os vectores $(1,0,1)$ e $(0,2,0)$ são ortogonais. Logo, o conjunto

$$\left\{\frac{(1,0,1)}{\|(1,0,1)\|},\frac{(0,2,0)}{\|(0,2,0)\|}\right\} = \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right),(0,1,0)\right\}$$

é uma base ortonormada para $(\mathcal{N}(A))^\perp$.

(1.2) **b)** O conjunto $\{(1,0,1),(0,2,0)\}$ é uma base para $\mathcal{C}(A)$ pois gera $\mathcal{C}(A)$ e é linearmente independente.

O conjunto $\{(1,0,1),(0,2,0),(0,0,1)\}$ é uma base para $\mathbb{R}^3$. Como $(1,0,1)$ e $(0,2,0)$ são ortogonais, basta aplicar Gram-Schmidt a $(0,0,1)$:

$$(0,0,1)-P_{(1,0,1)}(0,0,1)-P_{(0,2,0)}(0,0,1)=$$
$$=(0,0,1)-\frac{\langle(0,0,1),(1,0,1)\rangle}{\|(1,0,1)\|^2}(1,0,1)-\frac{\langle(0,0,1),(0,2,0)\rangle}{\|(0,2,0)\|^2}(0,2,0)=$$
$$=(0,0,1)-\frac{1}{2}(1,0,1)=\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right).$$

Logo, o conjunto

$$\left\{\frac{(1,0,1)}{\|(1,0,1)\|},\frac{(0,2,0)}{\|(0,2,0)\|},\frac{\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)}{\left\|\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)\right\|}\right\}=\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right),(0,1,0),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$$

é uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ que inclui dois vectores de $\mathcal{C}(A)$: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $(0,1,0)$.

(1.2) **c)** O elemento de $\mathcal{L}(A)$ mais próximo de $(1,2,3)$ é:

$$\begin{aligned}P_{\mathcal{L}(A)}(1,2,3) &= (1,2,3)-P_{\mathcal{N}(A)}(1,2,3) \underset{\mathcal{N}(A)=L(\{(-1,0,1)\})}{=} \\ &= (1,2,3)-\frac{\langle(1,2,3),(-1,0,1)\rangle}{\|(-1,0,1)\|^2}(-1,0,1)= \\ &= (1,2,3)-(-1,0,1)=(2,2,2).\end{aligned}$$

A distância entre $(1,2,3)$ e $\mathcal{L}(A)^\perp$ é:

$$d\left((1,2,3),(\mathcal{L}(A))^\perp\right)=\left\|P_{\mathcal{L}(A)}(1,2,3)\right\|=\|(2,2,2)\|=2\sqrt{3}.$$

(1.2) **d)** Os valores próprios de A são os valores de λ para os quais $\det(A-\lambda I)=0$. Como

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 1\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ 1 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}= \\ &= (2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2-1\right]=(2-\lambda)\left[(1-\lambda)-1\right]\left[(1-\lambda)+1\right]=-\lambda(2-\lambda)^2,\end{aligned}$$

os valores próprios de A são $\lambda_1=0$ e $\lambda_2=2$.
O subespaço próprio E_{λ_1} associado a λ_1 é dado por $E_{\lambda_1}=\mathcal{N}(A-\lambda_1 I)=\mathcal{N}(A)=L(\{(-1,0,1)\})$.
O subespaço próprio E_{λ_2} associado a λ_2 é dado por

$$E_{\lambda_2}=\mathcal{N}(A-\lambda_2 I)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{bmatrix}\right)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\right)=L(\{(1,0,1),(0,1,0)\}).$$

(1.2) **e)** A matriz A, sendo 3×3, é diagonalizável pois $\underbrace{\dim E_{\lambda_1}+\dim E_{\lambda_2}}_{=1+2}=3$, isto é, existe uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores próprios $(\{(-1,0,1),(1,0,1),(0,1,0)\})$ de A. Como os vectores $(-1,0,1),(1,0,1)$ e $(0,1,0)$ são ortogonais, o conjunto

$$\left\{\frac{(-1,0,1)}{\|(-1,0,1)\|},\frac{(1,0,1)}{\|(1,0,1)\|},\frac{(0,1,0)}{\|(0,1,0)\|}\right\}=\left\{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right),(0,1,0)\right\}$$

é uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ formada por vectores próprios de A.

Seja $P^T = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{bmatrix}$. Tem-se então $PAP^T = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

IV (2 val.)

Sejam A e B duas matrizes tais que $AB = BA$. Mostre que A e B têm um vector próprio em comum.

Dem. Suponhamos que as matrizes quadradas A e B são do tipo $n \times n$. Seja λ um valor próprio de A. Tem-se $\mathcal{N}(A - \lambda I) \neq \{\mathbf{0}\}$. Seja $r = \dim \mathcal{N}(A - \lambda I)$. Seja C a matriz $n \times r$ cujas colunas formam uma base ordenada $\mathcal{S}$ de $\mathcal{N}(A - \lambda I)$. Tem–se

$$(A - \lambda I) BC = ABC - \lambda BC \underset{AB=BA}{=} BAC - \lambda BC = B(A - \lambda I) C = B\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Seja $P = (p_{ij})$ a matriz $r \times r$ cujas colunas são respectivamente as coordenadas das colunas de BC em relação à base $\mathcal{S}$. Tem-se, para $k = 1, ..., r$

$$\underbrace{[BC]_{*k}}_{\text{coluna } k \text{ de } BC} = \sum_{i=1}^{r} p_{ik} \underbrace{[C]_{*i}}_{\text{coluna } i \text{ de } C} = \sum_{i=1}^{r} [C]_{*i} \, p_{ik}.$$

Logo, tem-se

$$BC = CP.$$

Seja v um vector próprio de P associado a um valor próprio μ. Tem-se $v \neq \mathbf{0}$ e $Cv \neq \mathbf{0}$ pois C tem característica máxima (= n^o de colunas). Além disso,

$$B(Cv) = (BC)v = (CP)v = C(Pv) = C(\mu v I) = \mu(Cv),$$

isto é, Cv é um vector próprio de B associado ao valor próprio μ.

Por outro lado, tem-se

$$A(Cv) = (AC)v = (\lambda I C)v = \lambda(Cv),$$

isto é, Cv é um vector próprio de A associado ao valor próprio λ.

Logo, Cv é um vector próprio comum a A e B.