Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

21 de Dezembro de 2002
Duração: 1h e 30 min.
Teste B

Resolução do 2º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: Lic. Eng. Geológica e Mineira, Lic. Eng. de Materiais e Lic. Eng. Mecânica

I (8 val.)

a)

$$T(x,y) = (-2y - 4x, y + 2x, 0), \quad T(1,0) = (-4,2,0), \quad T(0,1) = (-2,1,0).$$

Logo,

$$M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b)

$$\mathcal{N}(T) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0\right\} = L\left(\{(1,-2)\}\right).$$

Uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T)$ de T: $\{(1,-2)\}$. Como $\dim \mathcal{N}(T) = 1 \neq 0$, então T não é injectiva.

c)

$$\mathcal{I}(T) = \left\{T(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} = L\left(\{(-4,2,0)\}\right) = L\left(\{(-2,1,0)\}\right).$$

Uma base para o espaço imagem $\mathcal{I}(T)$ de T: $\{(-4,2,0)\}$. Como $\dim \mathcal{I}(T) = 1 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$, então T não é sobrejectiva.

d) A solução geral da equação $T(x,y) = (-4,2,0)$ é dada por:

$$(x,y) = (1,0) + \lambda(1,-2), \quad \text{com } \lambda \in \mathbb{R}.$$

II (6 val.)

Considere o espaço euclidiano $P_2 = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ com o produto interno $\langle , \rangle : P_2 \times P_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido da seguinte forma:

$$\langle p(t), q(t) \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1), \quad \text{para todo o } t \in \mathbb{R}.$$

Seja $U = \{p(t) \in P_2 : p(0) = p(-1)\}$ de P_2.

a) Se $p(t) \in U$ então $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ com $a_0 = a_0 - a_1 + a_2$. Logo, $a_1 = a_2$. Assim,

$$U = L\left(\left\{(1, t + t^2)\right\}\right).$$

Sejam $p_1(t) = 1$ e

$$p_2(t) = t + t^2 - Proj_1(t + t^2) = t + t^2 - \frac{\langle 1, t + t^2 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 = t + t^2 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3} + t + t^2.$$

Logo, temos uma base ortogonal para U:

$$\left\{1, -\frac{2}{3} + t + t^2\right\}$$

Base ortonormada para U:

$$\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{4}\left(-\frac{2}{3} + t + t^2\right)\right\}$$

Temos:

$$\begin{aligned} U^{\perp} &= \left\{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : \langle p(t), 1\rangle = 0 \ \text{ e } \ \left\langle p(t), t + t^2\right\rangle = 0\right\} = \\ &= \left\{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0 + a_1 + a_2 = 0 \ \text{ e } \ 3a_0 + 2a_2 = 0\right\} = \\ &= L\left(\left\{-\frac{2}{3} - \frac{1}{3}t + t^2\right\}\right). \end{aligned}$$

Base ortonormada para $U^{\perp}$:

$$\left\{\frac{3\sqrt{2}}{4}\left(-\frac{2}{3} - \frac{1}{3}t + t^2\right)\right\}$$

Determine uma base ortonormada para U e uma base ortonormada para $U^{\perp}$.

b) A projecção ortogonal sobre $U^{\perp}$ é dada por:

$$P_{U^{\perp}} : P_2 \longrightarrow P_2$$

$$p(t) \longrightarrow Proj_{-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}t+t^2} p(t).$$

Logo,

$$Proj_{-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}t+t^2}(1+t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}t - \frac{3}{4}t^2.$$

c) Temos:

$$\begin{aligned} d(1+t, U) &= \left\| Proj_{-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}t+t^2}(1+t) \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{2} + \frac{1}{4}t - \frac{3}{4}t^2 \right\| = \\ &= \sqrt{\left\langle \frac{1}{2} + \frac{1}{4}t - \frac{3}{4}t^2, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}t - \frac{3}{4}t^2 \right\rangle} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$