Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

6 de Julho de 2009
Duração: 3 h.

Resolução do 2^o EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: LEMat, LEAN, MEAer, MEBiol, MEMec e MEQ

1) $$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \alpha & 0 \\ 1 & \alpha & -1 & 0 \\ 1 & -1 & \alpha^3 & 0 \\ -1 & 1 & -\alpha & \alpha^2-1 \end{bmatrix} \underset{\substack{-L_1+L_2\to L_2 \\ -L_1+L_3\to L_3 \\ L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha+1 & -\alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha(\alpha^2-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2-1 \end{bmatrix}.$$

a) (1.6) Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -1$ então $\operatorname{car} A_\alpha = 4$. Se $\alpha = 0$ então $\operatorname{car} A_\alpha = 3$. Se $\alpha = 1$ então $\operatorname{car} A_\alpha = 2$. Se $\alpha = -1$ então $\operatorname{car} A_\alpha = 1$. Por outro lado, tem-se:

$$\operatorname{car} A_\alpha + \operatorname{nul} A_\alpha = 4 \ \ (= \text{n}^o \text{ de colunas de } A_\alpha).$$

Logo, se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -1$ então $\operatorname{nul} A_\alpha = 0$. Se $\alpha = 0$ então $\operatorname{nul} A_\alpha = 1$. Se $\alpha = 1$ então $\operatorname{nul} A_\alpha = 2$. Se $\alpha = -1$ então $\operatorname{nul} A_\alpha = 3$.

b) (1.6) A_α é invertível se e só se $\det A_\alpha \neq 0$. Como $\det A_\alpha = \alpha\left(\alpha^2-1\right)^2(\alpha+1) = \alpha(\alpha+1)^3(\alpha-1)^2$ então A_α é invertível se e só se $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -1$ e $\alpha \neq 0$.

Para $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -1$ e $\alpha \neq 0$, a entrada $(1,2)$ da matriz inversa $(A_\alpha)^{-1}$ é dada por:

$$\left((A_\alpha)^{-1}\right)_{(1,2)} = \left(\frac{(\operatorname{cof} A_\alpha)^T}{|A_\alpha|}\right)_{(1,2)} = \frac{(\operatorname{cof} A_\alpha)_{(2,1)}}{|A_\alpha|} = \frac{(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & \alpha & 0 \\ -1 & \alpha^3 & 0 \\ 1 & -\alpha & \alpha^2-1 \end{vmatrix}}{\alpha\left(\alpha^2-1\right)^2(\alpha+1)} =$$

$$= \frac{(-1)\left(\alpha^2-1\right)\begin{vmatrix} -1 & \alpha \\ -1 & \alpha^3 \end{vmatrix}}{\alpha\left(\alpha^2-1\right)^2(\alpha+1)} = \frac{(-1)\left(\alpha^2-1\right)\left(-\alpha^3+\alpha\right)}{\alpha\left(\alpha^2-1\right)^2(\alpha+1)} = \frac{1}{\alpha+1}.$$

c) (1.6) Seja $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

$$A_2 x = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 8 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

A solução geral de $A_2 x = b$ é dada por:

$$(\text{Solução particular de } A_2x = b) + (\text{Solução geral de } A_2 x = \mathbf{0}).$$

O vector $(0,-1,0,0)$ é uma solução particular de $A_2x = b$. Logo, a solução geral de $A_2 x = b$ é dada por:

$$\{(0,-1,0,0)\} + \mathcal{N}(A_2) = \{(0,-1,0,0)\},$$

uma vez que sendo A_2 invertível tem-se $\mathcal{N}(A_2) = \{\mathbf{0}\}$.

2) Considere a transformação linear $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T_1(x,y) = (2x+y, 0, x+2y)$. Considere ainda a transformação linear $T_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuja representação matricial em relação à base (ordenada) $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e à base canónica $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^2$ é dada pela matriz:

$$M(T_2;\mathcal{B};\mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) (1.6) $T_2\,(0,1,0) = T_2(1,1,0) - T_2(1,0,0) = (-1,1) - (1,-1) = (-2,2)$.
$T_2\,(0,0,1) = T_2(1,1,1) - T_2(1,1,0) = (1,-1) - (-1,1) = (2,-2)$.

b) (1.6) Tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{I}\,(T_1) &= \left\{T_1(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{(2x+y,0,x+2y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \\ &= \{x(2,0,1) + y(1,0,2) : x,y \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(2,0,1),(1,0,2)\}\right). \end{aligned}$$

Como o conjunto $\{(2,0,1),(1,0,2)\}$ gera $\mathcal{I}\,(T_1)$ e é linearmente independente, então é uma base de $\mathcal{I}\,(T_1)$.
Como $\dim \mathcal{I}(T_1) = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$ então $\mathcal{I}(T_1) \neq \mathbb{R}^3$ e assim, T_1 não é sobrejectiva.

c) (1.6) $\mathcal{N}\,(M(T_2;\mathcal{B};\mathcal{B}_c^2)) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \{(y-z,y,z) : y,z \in \mathbb{R}\} =$ $= L\left(\{(1,1,0),(-1,0,1)\}\right)$. Como os vectores $(1,1,0)$ e $(-1,0,1)$ são as coordenadas na base $\mathcal{B}$ de vectores que geram o núcleo de T_2, tem-se

$$1(1,1,1) + 1(1,1,0) + 0(1,0,0) = (2,2,1)$$

e

$$-1(1,1,1) + 0(1,1,0) + 1(1,0,0) = (0,-1,-1)$$

Como o conjunto $\{(2,2,1),(0,-1,-1)\}$ gera $\mathcal{N}\,(T_2)$ e é linearmente independente, então é uma base de $\mathcal{N}\,(T_2)$. Como $\mathcal{N}(T_2) \neq \{\mathbf{0}\}$ então T_2 não é injectiva.

d) (1.6) Pela definição de $M(T_2;\mathcal{B};\mathcal{B}_c^2)$ tem-se $T_2\,(1,0,0) = (1,-1)$. Atendendo à alínea **a)**, tem-se $T_2\,(0,1,0) = (-2,2)$ e $T_2\,(0,0,1) = (2,-2)$. Logo, a matriz $M(T_2;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2)$ que representa T_2 em relação às bases canónicas $\mathcal{B}_c^3$ e $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ respectivamente, é dada por

$$M(T_2;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, como $T_1\,(1,0) = (2,0,1)$ e $T_1\,(0,1) = (1,0,2)$. Logo, a matriz $M(T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^3)$ que representa T_1 em relação às bases canónicas $\mathcal{B}_c^2$ e $\mathcal{B}_c^3$ de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ respectivamente, é dada por

$$M(T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Logo, a matriz que representa $T_2 \circ T_1$ em relação à base canónica $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^2$ é dada por

$$M(T_2 \circ T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2) = M(T_2;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2)M(T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}.$$

Logo, tem-se

$$(T_2 \circ T_1)(x,y) = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

e assim,

$$(T_2 \circ T_1)(x,y) = (-1,1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A solução geral de $(T_2 \circ T_1)(x,y) = (-1,1)$ é dada por:

$$\left(\text{Solução particular de } \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + \left(\text{Solução geral de } \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right).$$

Como o vector $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ é uma solução particular de $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e

$$\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = L\left(\left\{\left(-\frac{5}{4}, 1\right)\right\}\right)$$

então, a solução geral de $(T_2 \circ T_1)(x,y) = (-1,1)$ é dada por:

$$\left(-\frac{1}{4}, 0\right) + \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}\right) = \left\{\left(-\frac{1}{4}, 0\right) + r\left(-\frac{5}{4}, 1\right) : r \in \mathbb{R}\right\}.$$

3) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e considere o produto interno usual.

Sejam $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{C}(A)$ e $\mathcal{L}(A)$ respectivamente o núcleo, espaço das colunas e espaço das linhas de A.

a) (1.6) O conjunto $\{(1,0,2),(2,0,1)\}$ é uma base para $\mathcal{C}(A)$ pois gera $\mathcal{C}(A)$ e é linearmente independente.

O conjunto $\{(1,0,2),(2,0,1),(0,1,0)\}$ é uma base para $\mathbb{R}^3$. Como $(2,0,1)$ e $(0,1,0)$ são ortogonais, basta aplicar Gram-Schmidt a $(1,0,2)$:

$$(1,0,2) - P_{(2,0,1)}(1,0,2) - P_{(0,1,0)}(1,0,2) =$$

$$= (1,0,2) - \frac{\langle (1,0,2),(2,0,1)\rangle}{\|(2,0,1)\|^2}(2,0,1) - \frac{\langle (1,0,2),(0,1,0)\rangle}{\|(0,1,0)\|^2}(0,1,0) =$$

$$= (1,0,2) - \frac{4}{5}(2,0,1) = \left(-\frac{3}{5}, 0, \frac{6}{5}\right).$$

Logo, o conjunto

$$\left\{\frac{(2,0,1)}{\|(2,0,1)\|}, \frac{(0,1,0)}{\|(0,1,0)\|}, \frac{\left(-\frac{3}{5},0,\frac{6}{5}\right)}{\left\|\left(-\frac{3}{5},0,\frac{6}{5}\right)\right\|}\right\} = \left\{\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{\sqrt{5}}{5}\right), (0,1,0), \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\right\}$$

é uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ que inclui dois vectores de $\mathcal{C}(A)$: $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

b) (1.6) O elemento de $\mathcal{L}(A)$ mais próximo de $(1,1,1)$ é:

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{L}(A)}(1,1,1) &= (1,1,1) - P_{\mathcal{N}(A)}(1,1,1) \underset{\mathcal{N}(A)=L(\{(0,1,0)\})}{=} \\ &= (1,1,1) - \frac{\langle (1,1,1),(0,1,0)\rangle}{\|(0,1,0)\|^2}(0,1,0) = \\ &= (1,1,1)-(0,1,0) = (1,0,1). \end{aligned}$$

A distância entre $(1,1,1)$ e $\mathcal{N}(A)$ é:

$$d\left((1,1,1),\mathcal{N}(A)\right) = \left\| P_{(\mathcal{N}(A))^\perp}(1,1,1) \right\| = \left\| P_{\mathcal{L}(A)}(1,1,1)\right\| = \|(1,0,1)\| = \sqrt{2}.$$

c) (1.6) Os valores próprios de A são os valores de λ para os quais $\det(A-\lambda I)=0$. Como

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= -\lambda\left[(1-\lambda)^2-4\right] = -\lambda\left[(1-\lambda)-2\right]\left[(1-\lambda)+2\right] = \lambda(\lambda+1)(3-\lambda), \end{aligned}$$

os valores próprios de A são $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-1$ e $\lambda_3=3$.
O subespaço próprio E_{λ_1} associado a λ_1 é dado por $E_{\lambda_1} = \mathcal{N}(A-\lambda_1 I) = \mathcal{N}(A) = L(\{(0,1,0)\})$.
O subespaço próprio E_{λ_2} associado a λ_2 é dado por

$$E_{\lambda_2} = \mathcal{N}(A-\lambda_2 I) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(-1,0,1)\}\right).$$

O subespaço próprio E_{λ_3} associado a λ_3 é dado por

$$E_{\lambda_3} = \mathcal{N}(A-\lambda_3 I) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(1,0,1)\}\right).$$

A matriz A, sendo 3×3, é diagonalizável pois $\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} + \dim E_{\lambda_3} = 3$, isto é, existe uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores próprios $(\{(0,1,0),(-1,0,1),(1,0,1)\})$ de A.
Seja $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Tem-se então $PAP^{-1} = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

4) (1.0) Seja $U = L(\{(1,1,1,0),(0,1,1,1)\})$. Seja $(x,y,z,w)\in U$. Então existem $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tais que

$$(x,y,z,w) = \alpha(1,1,1,0)+\beta(0,1,1,1).$$

Deste modo, o seguinte sistema (nas variáveis α e β) tem que ser possível e determinado:

$$\begin{cases} \alpha = x \\ \alpha+\beta = y \\ \alpha+\beta = z \\ \beta = w \end{cases}$$

Considerando então a matriz aumentada deste sistema, tem-se:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \\ 0 & 1 & w \end{array}\right] \underset{\substack{-L_1+L_2\to L_2 \\ -L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \left[\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & 1 & z-x \\ 0 & 1 & w \end{array}\right]\right] \underset{\substack{-L_2+L_3\to L_3 \\ -L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \left[\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & z-y \\ 0 & 0 & x-y+w \end{array}\right]\right].$$

Logo, para que o sistema anterior seja possível e determinado, é preciso que se tenha $z-y=0$ e $x-y+w=0$.

Assim, $U=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : x-y+w=0 \ \text{ e } \ z-y=0\}$, isto é,

$$U=\mathcal{N}(A), \ \text{ com } \ A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

5) (1.0) Seja $\mathcal{B}=\{(1,0),(1,-1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$. Vamos definir um produto interno em $\mathbb{R}^2$ em relação ao qual a base $\mathcal{B}$ é ortonormada.

Seja $\mathcal{B}_c^2=\{(1,0),(0,1)\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^2$. A matriz de mudança de base de B_c^2 para $\mathcal{B}$ é dada por

$$S_{B_c^2\to\mathcal{B}}=\left(S_{\mathcal{B}\to B_c^2}\right)^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sejam $u,v\in\mathbb{R}^2$. Tem-se

$$u=(\alpha_1,\alpha_2) \quad \text{e} \quad v=(\beta_1,\beta_2)\,,$$

onde α_1,α_2 e β_1,β_2 são as coordenadas na base $\mathcal{B}_c^2$ de u e v respectivamente. Seja $S=S_{B_c^2\to\mathcal{B}}$. Logo, tem-se a aplicação $\langle,\rangle:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ definida por

$$\langle u,v\rangle=(Su)^T G\,(Sv)\,, \quad \text{com } G=\begin{bmatrix} \langle v_1,v_1\rangle & \langle v_1,v_2\rangle \\ \langle v_2,v_1\rangle & \langle v_2,v_2\rangle \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\langle(\alpha_1,\alpha_2)\,,(\beta_1,\beta_2)\rangle &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}\right)^T\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}\right)= \\ &= \alpha_1\beta_1+\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1+2\alpha_2\beta_2.\end{aligned}$$

Como

$$\langle(\alpha_1,\alpha_2)\,,(\beta_1,\beta_2)\rangle=\alpha_1\beta_1+\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1+2\alpha_2\beta_2=\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

e a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ é simétrica, sendo os seus valores próprios ($\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{3}{2}$ e $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$) positivos, então a expressão

$$\langle(\alpha_1,\alpha_2)\,,(\beta_1,\beta_2)\rangle=\alpha_1\beta_1+\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1+2\alpha_2\beta_2$$

define um produto interno em $\mathbb{R}^2$. Além disso, é fácil verificar que para este produto interno a base $\mathcal{B}=\{(1,0),(1,-1)\}$ é ortonormada:

$$\langle(1,0)\,,(1,-1)\rangle=0 \ \text{ e } \ \langle(1,0)\,,(1,0)\rangle=\langle(1,-1)\,,(1,-1)\rangle=1.$$

6) (2.0) Sejam A uma matriz $m\times n$ e B uma matriz $n\times p$. Mostre que

$$\dim\mathcal{C}\,(AB)=\dim\mathcal{C}\,(B)-\dim\left(\mathcal{N}\,(A)\cap\mathcal{C}\,(B)\right).$$

Dem. Se $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(B) = \{\mathbf{0}\}$, então $\dim(\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(B)) = 0$ e $\dim \mathcal{C}(AB) = \dim \mathcal{C}(B)$.

Suponhamos então que $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(B) \neq \{\mathbf{0}\}$. Seja $\{x_1, \ldots, x_s\}$ uma base para $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(B)$ e suponhamos que $AB \neq \mathbf{0}$ (no caso em que $AB = \mathbf{0}$ tem-se $\dim \mathcal{C}(AB) = 0$ e $\dim \mathcal{C}(B) = \dim(\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(B))$ pois $\mathcal{C}(B) \subset \mathcal{N}(A)$). Seja $\{x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_t\}$ é uma base para $\mathcal{C}(B)$. Nesse caso $\dim \mathcal{C}(AB) = s + t$. Vejamos que $\{Ay_1, \ldots, Ay_t\}$ é uma base para $\mathcal{C}(AB)$.

Seja $b \in \mathcal{C}(AB)$. Tem-se $ABz = b$ para algum z. Mas, como $Bz \in \mathcal{C}(B)$, então existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_t$ tais que

$$Bz = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{t} \beta_j y_j.$$

Logo,

$$b = ABz = A\left(\sum_{i=1}^{s} \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^{t} \beta_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i A x_i + \sum_{j=1}^{t} \beta_j A y_j \underset{\{x_1,\ldots,x_s\} \subset \mathcal{N}(A)}{=} \sum_{j=1}^{t} \beta_j A y_j,$$

isto é, $\{Ay_1, \ldots, Ay_t\}$ gera $\mathcal{C}(AB)$.

Vejamos que $\{Ay_1, \ldots, Ay_t\}$ é linearmente independente. Suponhamos que existiam escalares $\xi_1, \ldots, \xi_t$ tais que

$$\mathbf{0} = \sum_{j=1}^{t} \xi_j A y_j.$$

Tem-se

$$\mathbf{0} = \sum_{j=1}^{t} \xi_j A y_j = A\left(\sum_{j=1}^{t} \xi_j y_j\right)$$

e então $\sum_{j=1}^{t} \xi_j y_j \in \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(B)$. E assim, existem escalares $\eta_1, \ldots, \eta_s$ tais que

$$\sum_{j=1}^{t} \xi_j y_j = \sum_{i=1}^{s} \eta_i x_i.$$

Como

$$\sum_{j=1}^{t} \xi_j y_j = \sum_{i=1}^{s} \eta_i x_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{t} \xi_j y_j - \sum_{i=1}^{s} \eta_i x_i = \mathbf{0}$$

e atendendo a que $\{x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_t\}$ é uma base para $\mathcal{C}(B)$, tem-se

$$\xi_1 = \ldots = \xi_t = \eta_1 = \ldots = \eta_s = 0$$

e assim o conjunto $\{Ay_1, \ldots, Ay_t\}$ é linearmente independente.

Logo, o conjunto $\{Ay_1, \ldots, Ay_t\}$ é uma base para $\mathcal{C}(AB)$ e assim

$$\dim \mathcal{C}(B) = s + t = \dim(\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(B)) + \dim \mathcal{C}(AB) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dim \mathcal{C}(AB) = \dim \mathcal{C}(B) - \dim(\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(B)).$$