Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

3 de Abril de 2009
Duração: 50 min.

Teste A

1^o TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: LEMat, LEAN, MEAer, MEBiol, MEMec e MEQ

1) Seja

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 2 & \alpha^2 & -\alpha \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha^2 - 1 & \alpha + 1 \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) (1.2) Determine a característica e a nulidade de A_α em função do parâmetro α e diga quais são os valores de α para os quais A_α é invertível.

b) (1.2) Sendo $\alpha = -1$, determine uma base para $\mathcal{N}(A_{-1})$ (o núcleo de A_{-1}) e uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua dois vectores de $\mathcal{N}(A_{-1})$.

c) (1.2) Sendo $\alpha = -1$, indique uma base para o espaço das colunas de A_{-1} e determine a solução geral do sistema de equações lineares $A_{-1}X = B$, em que $B = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 \end{bmatrix}^T$.

d) (1.2) Seja $\alpha = 0$. Determine a inversa da matriz A_0 e factorize A_0 na forma $A_0 = LDU$, obtendo uma matriz L triangular inferior com 1's na diagonal principal, uma matriz diagonal D e uma matriz U triangular superior com 1's na diagonal principal.

2) (1.2) Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:

$$U = L(\{(1,2,3),(3,2,1)\}) \qquad \text{e} \qquad V = L(\{(1,0,-1),(0,1,0)\}).$$

Justifique que $U + V = \mathbb{R}^3$ e determine uma base para o subespaço $U \cap V$.

3) (1.0) Considere o espaço linear P_1 de todos os polinómios reais de grau menor ou igual a 1. Sejam $\mathcal{B}_1 = \{t, 2-t\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{2, 1-t\}$ duas bases (ordenadas) de P_1.

Determine a matriz $S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$ de mudança da base $\mathcal{B}_1$ para a base $\mathcal{B}_2$ e calcule as coordenadas do vector $p(t) = 2 + t$ em relação à base $\mathcal{B}_2$.