Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

15 de Novembro de 2004
Duração: 45 min.

Teste A

2^o TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: Lic. Eng. Geológica e Mineira, Lic. Eng. de Materiais e Lic. Eng. Mecânica

I (1.3 val.)

Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:
$U = L(\{(1,0,-1),(0,-1,1)\})$ e $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y+z=0\}$.
(0.7) **a)** Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua os dois vectores que geram U.
(0.6) **b)** Diga, justificando, quais as dimensões dos subespaços $U+V$ e $U \cap V$.

II (1.8 val.)

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y) = (-4y-2x, 0, x+2y).$$

(0.6) **a)** Determine uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T)$ de T. Diga se T é injectiva.
(0.6) **b)** Diga, justificando, qual a dimensão do contradomínio $\mathcal{I}(T)$ de T. Diga se T é sobrejectiva.
(0.6) **c)** Determine a solução geral da equação $T(x,y) = (-2,0,1)$.

III (1.2 val.)

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuja representação matricial em relação às bases canónicas (ordenadas) $\mathcal{B}_c^3$ e $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ respectivamente, é dada pela matriz:

$$M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Considere ainda as bases ordenadas $\mathcal{S}_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{S}_2 = \{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ com:

$$u_1 = (-1,0,1), \quad u_2 = (1,1,0), \quad u_3 = (0,2,1), \quad v_1 = (1,1) \quad \text{e} \quad v_2 = (2,1).$$

(0.6) **a)** Determine as matrizes de mudança de base $S_{\mathcal{B}_c^2 \to \mathcal{S}_2}$ e $S_{\mathcal{S}_1 \to \mathcal{B}_c^3}$.
(0.6) **b)** Determine a matriz $M(T; \mathcal{S}_1; \mathcal{S}_2)$ que representa T em relação às bases ordenadas $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$.

IV (0.7 val.)

Seja $\{v_1, v_2\}$ uma base de um espaço linear U. Considere os vectores $w_1 = av_1 + bv_2$ e $w_2 = cv_1 + dv_2$, com $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Prove que $\{w_1, w_2\}$ é também uma base de U se e só se a matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

fôr invertível.