Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

11 de Maio de 2009
Duração: 50 min.
Teste A

2^o TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: LEMat, LEAN, MEAer, MEBiol, MEMec e MEQ

1) (1.4) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determine a entrada $(2,3)$ da matriz inversa A^{-1}.

2) Seja

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

Sabendo que $\det B = 18$, calcule:

(0.7) **a)** $\det \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

(0.7) **b)** $\det \left(-\frac{1}{3}B^{-1}B^T\right)$

3) (1.4) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que em relação à base canónica ordenada $(\mathcal{B}_c^2 = \{(1,0), (0,1)\})$ de $\mathbb{R}^2$ é representada pela matriz:

$$M\left(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Justifique que T é injectiva e resolva a equação linear $T(x,y) = (1,2)$.

4) (1.4) Considere a transformação linear $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $T_1(x,y) = y$. Seja

$$M\left(T_2; \mathcal{B}_c^1; \mathcal{B}_c^2\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a matriz que representa a aplicação linear $T_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ em relação às bases canónicas ordenadas $\mathcal{B}_c^1 = \{1\}$ e $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$ respectivamente.

Determine uma base para o núcleo: $\mathcal{N}(T_2 \circ T_1)$.

5) (1.4) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuja representação matricial em relação as bases ordenadas $\mathcal{B}_1 = \{(1,0,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}_2 = \{(1,1), (0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ é dada pela matriz:

$$M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Determine uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T)$ e diga, justificando, se T é sobrejectiva.