

3º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: LEMat, LEAN, MEAer, MEBiol, MEMec e MEQ

1) Considere \mathbb{R}^3 com o produto interno usual. Considere também os seguintes subespaços de \mathbb{R}^3 :

$$U = L(\{(0, 1, 1), (0, 0, 1)\}) \quad \text{e} \quad V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y - z = 0\}.$$

(1.0) **a)** Determine uma base ortogonal para U e uma base ortonormada para V .

(1.0) **b)** Determine duas bases ortonormadas para \mathbb{R}^3 : uma que inclua dois vectores de U e outra que inclua dois vectores de V .

(1.0) **c)** Determine o elemento de U mais próximo de $(1, 1, 1)$ e a distância entre $(1, 1, 1)$ e V^\perp .

2) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

(1.0) **a)** Determine os valores próprios de A e os respectivos subespaços próprios.

(1.0) **b)** Justifique que a matriz A é diagonalizável e determine a matriz P^{-1} de tal modo que a matriz $D = PAP^{-1}$ seja diagonal. Determine (sem calcular P) a matriz D .

3) (1.0) Sejam A e B duas matrizes invertíveis do tipo $n \times n$. Mostre que se λ é um valor próprio de AB então λ é um valor próprio de BA .