Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

3 de Abril de 2009
Duração: 50 min.
Teste A

Resolução do 1^o TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: LEMat, LEAN, MEAer, MEBiol, MEMec e MEQ

1) a) Aplicando o método de eliminação de Gauss

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 2 & \alpha^2 & -\alpha \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha^2-1 & \alpha+1 \end{bmatrix} \underset{-L_1+L_2\to L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & \alpha^2 & -\alpha \\ 0 & 1-\alpha^2 & \alpha+1 \\ 0 & \alpha^2-1 & \alpha+1 \end{bmatrix} \underset{L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & \alpha^2 & -\alpha \\ 0 & 1-\alpha^2 & \alpha+1 \\ 0 & 0 & 2\alpha+2 \end{bmatrix} = A'_\alpha,$$

obtem-se uma matriz em escada A'_α, com $\operatorname{car} A_\alpha = \operatorname{car} A'_\alpha$ e $\operatorname{nul} A_\alpha = \operatorname{nul} A'_\alpha$. Logo, atendendo também a que $\operatorname{car} A_\alpha + \operatorname{nul} A_\alpha = 3$ (= n^o de colunas de A_α), tem-se:

$\operatorname{car} A_\alpha = 3$ e $\operatorname{nul} A_\alpha = 0$ se e só se $\alpha \neq -1$ e $\alpha \neq 1$;
$\operatorname{car} A_\alpha = 2$ e $\operatorname{nul} A_\alpha = 1$ se e só se $\alpha = 1$;
$\operatorname{car} A_\alpha = 1$ e $\operatorname{nul} A_\alpha = 2$ se e só se $\alpha = -1$.

Como A_α é invertível se e só se A_α é não singular (ou se e só se $\operatorname{nul} A_\alpha = 0$), tem-se A_α invertível se e só se $\alpha \neq -1$ e $\alpha \neq 1$.

b) Tem-se:

$$\mathcal{N}(A_{-1}) = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 : A_{-1}X = \mathbf{0} \right\}.$$

Seja $X = (x, y, z)$. Atendendo a que $\mathcal{N}(A_{-1}) = \mathcal{N}\left(A'_{-1}\right)$ e

$$A'_{-1}X = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow 2x + y + z = 0,$$

tem-se

$$\mathcal{N}(A_{-1}) = \{(x, y, -2x-y) : x, y \in \mathbb{R}\} = L(\{(1,0,-2), (0,1,-1)\}).$$

O conjunto $\{(1,0,-2), (0,1,-1)\}$ é uma base para $\mathcal{N}(A_{-1})$ pois gera $\mathcal{N}(A_{-1})$ e é linearmente independente.

Atendendo a que $\mathbb{R}^3 = \mathcal{L}(A_{-1}) \oplus \mathcal{N}(A_{-1})$ e uma vez que $(2,1,1) \in \mathcal{L}(A_{-1})$, o conjunto $\{(2,1,1), (1,0,-2), (0,1,-1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclui dois vectores de $\mathcal{N}(A_{-1})$.

c) Para $\alpha = -1$, tem-se:

$$A_{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{-L_1+L_2\to L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'_{-1},$$

O conjunto $\{(2,2,0)\}$ é uma base para $\mathcal{C}(A_{-1})$ pois é constituído pela coluna de A_{-1} que corresponde à coluna de A'_{-1} que contem o pivot.

Seja $X = (x, y, z)$.

$$A_{-1}X = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A solução geral de $A_{-1}X = B$ é dada por:

$$(\text{Solução particular de } A_{-1}X = B) + (\text{Solução geral de } A_{-1}X = \mathbf{0}).$$

Note-se que $\mathcal{N}(A_{-1})$ = Solução geral de $A_{-1}X = \mathbf{0}$. O vector $(0,0,-3)$ é uma solução particular de $A_{-1}X = B$. Logo, atendendo à alínea anterior, a solução geral de $A_{-1}X = B$ é dada por:

$$X = (0,0,-3) + s(1,0,-2) + t(0,1,-1), \ \ (\text{com } s,t \in \mathbb{R}).$$

Obs. Esta alínea podia ter sido resolvida directamente sem usar **b).**

d) Para $\alpha = 0$,

$$[A_0 \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{-L_1+L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{\frac{1}{2}L_1 \to L_1 \\ \frac{1}{2}L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \underset{-L_3+L_2 \to L_2}{\longrightarrow}$$

$$\underset{-L_3+L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Logo, $A_0^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Com $E_{12}(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $E_{23}(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, tem-se

$$E_{23}(1)E_{12}(-1)A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$A_0 = LDU, \quad \text{com} \quad L = (E_{12}(-1))^{-1} (E_{23}(1))^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2) Em $\mathbb{R}^3$, considere os subespaços:

$$U = L(\{(1,2,3),(3,2,1)\}) \qquad \text{e} \qquad V = L(\{(1,0,-1),(0,1,0)\}).$$

Observe-se que os conjuntos $\{(1,2,3),(3,2,1)\}$ e $\{(1,0,-1),(0,1,0)\}$ são bases respectivamente de U e V (uma vez que são linearmente independentes além de serem conjuntos geradores dos respectivos subespaços). Logo

$$\dim U = \dim V = 2$$

Tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{-2L_1+L_2\to L_2 \\ -3L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & -8 & -4 & 0 \end{bmatrix} \underset{-2L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Logo, o conjunto $\{(1,2,3),(3,2,1),(0,1,0)\}$ é linearmente independente. Como

$U+V = L(U\cup V) = L(\{(1,2,3),(3,2,1),(1,0,-1),(0,1,0)\}) = L(\{(1,2,3),(3,2,1),(0,1,0)\})$,

então o conjunto $\{(1,2,3),(3,2,1),(0,1,0)\}$ é uma base de $U+V$ e assim $\dim(U+V)=3$. Por outro lado, como $U+V$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$ e $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, então $U+V=\mathbb{R}^3$.

Seja $v \in V$, então

$$v = \alpha(1,0,-1) + \beta(0,1,0) = (\alpha,\beta,-\alpha),$$

com $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Para que v esteja também em U é preciso que:

$$(\alpha,\beta,-\alpha) = \lambda(1,2,3) + \mu(3,2,1) = (\lambda+3\mu, 2\lambda+2\mu, 3\lambda+\mu),$$

com $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Deste modo,

$$\begin{cases} \alpha = \lambda + 3\mu \\ \beta = 2\lambda + 2\mu \\ -\alpha = 3\lambda + \mu. \end{cases}$$

Considerando a matriz aumentada tem-se

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & \alpha \\ 2 & 2 & \beta \\ 3 & 1 & -\alpha \end{array}\right] \underset{\substack{-2L_1+L_2\to L_2 \\ -3L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & \alpha \\ 0 & -4 & \beta-2\alpha \\ 0 & -8 & -4\alpha \end{array}\right] \underset{-2L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & \alpha \\ 0 & -4 & \beta-2\alpha \\ 0 & 0 & -2\beta \end{array}\right].$$

Logo,

$$-2\beta = 0$$

Assim,

$$v = (\alpha, 0, -\alpha) = \alpha(1,0,-1),$$

com $\alpha\in\mathbb{R}$. Logo,

$$U\cap V = \{(\alpha,0,-\alpha) : \alpha\in\mathbb{R}\} = \{\alpha(1,0,-1) : \mu\in\mathbb{R}\} = L(\{(1,0,-1)\})$$

e assim o conjunto $\{(1,0,-1)\}$ é uma base de $U\cap V$.

3) (1.0) Considere o espaço linear P_1 de todos os polinómios reais de grau menor ou igual a 1. Sejam $\mathcal{B}_1 = \{t, 2-t\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{2, 1-t\}$ duas bases (ordenadas) de P_1.

Determinam-se os valores de $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ tais que

$$t = a2 + b(1-t) \qquad \text{e} \qquad 2-t = c2 + d(1-t),$$

e assim

$$S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como as coordenadas de $p(t) = 2+t$ em relação à base $\mathcal{B}_1$ são dadas por $(2,1)$, então as coordenadas de $p(t)=2+t$ em relação à base $\mathcal{B}_2$ são dadas por $\left(\frac{3}{2},-1\right)$:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{bmatrix}.$$