Instituto Superior Técnico — 22 de Abril de 2006
Departamento de Matemática — Duração: 1h e 30 min.
Secção de Álgebra e Análise — **Teste D**

Resolução do 1º TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA I

CURSOS: LEAmb, LEB, LEGM, LEM, LEMat, LEQ e LQ

Nome: **Nº:** **Curso:**

Apresente **todos** os cálculos e justificações relevantes.

(1 val.) **1.** Considere o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}$:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : -1 < |x-3| - |2-x| \leq 0\}.$$

a) Tem-se $-1 < |x-3| - |2-x| \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq |x-2| - |x-3| < 1$.
Se $x \leq 2$, $0 \leq |x-2| - |x-3| < 1 \Leftrightarrow 0 \leq -x+2+x-3 < 1 \Leftrightarrow 0 \leq -1 < 1$. Logo $x \in \emptyset$.
Se $2 < x < 3$, $0 \leq |x-2| - |x-3| < 1 \Leftrightarrow 0 \leq x-2+x-3 < 1 \Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq x < 3$. Logo $x \in \left[\frac{5}{2}, 3\right[$.
Se $x \geq 3$, $0 \leq |x-2| - |x-3| < 1 \Leftrightarrow 0 \leq x-2-x+3 < 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1 < 1$. Logo $x \in \emptyset$.
Assim

$$A = \left[\frac{5}{2}, 3\right[.$$

b) Conjunto dos majorantes de A: $[3, +\infty[$.
Conjunto dos minorantes de A: $\left]-\infty, \frac{5}{2}\right]$.
$\sup A = 3$.
A não tem máximo pois $\sup A \notin A$.
$\inf A = \min A = \frac{5}{2}$.

(2 val.) **2.** Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$ ou mostre que não existem, os limites das seguintes sucessões de termos gerais.

a) $\lim \dfrac{3\log n^3 + 3n!}{2n! - (-3)^n} = \lim \dfrac{9\dfrac{\log n}{n!} + 3}{2 - (-1)^n \dfrac{3^n}{n!}} = \dfrac{3}{2}$. Pela escala de sucessões tem-se $\dfrac{3^n}{n!} \to 0$ e $\dfrac{\log n}{n!} \to 0$, e como $(-1)^n$ é limitada, tem-se $(-1)^n \dfrac{3^n}{n!} \to 0$.

b) Seja $x_n = \dfrac{n^2}{(-n)^{-n}(n+1)^{n+1}}$. Tem-se $x_n = (-1)^n \dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \dfrac{n}{1+\frac{1}{n}}$. Como

$$x_{2n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}} \frac{2n}{1+\frac{1}{2n}} \to \frac{1}{e}(+\infty) = +\infty$$

e

$$x_{2n-1} = -\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{2n-1}} \frac{2n-1}{1+\frac{1}{2n-1}} \to -\frac{1}{e}(+\infty) = -\infty,$$

então o $\lim x_n = \lim \dfrac{n^2}{(-n)^{-n}(n+1)^{n+1}}$ não existe em $\overline{\mathbb{R}}$ pois $\lim x_{2n} \neq \lim x_{2n-1}$.

c) Tem-se $\dfrac{n}{4}\sqrt[n]{\dfrac{(2n+1)!}{(n!)^3}} = \dfrac{1}{4}\sqrt[n]{n^n\dfrac{(2n+1)!}{(n!)^3}}$ e $\lim \dfrac{(n+1)^{n+1}\dfrac{(2n+3)!}{((n+1)!)^3}}{n^n\dfrac{(2n+1)!}{(n!)^3}} =$

$$= \lim\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{(2n+3)(2n+2)(n+1)}{(n+1)^3}\right] = \lim\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{\left(2+\frac{3}{n}\right)\left(2+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}\right] = 4e.$$

Logo,

$$\lim\left(\frac{n}{4}\sqrt[n]{\frac{(2n+1)!}{(n!)^3}}\right) = \lim\left(\frac{1}{4}\sqrt[n]{n^n\frac{(2n+1)!}{(n!)^3}}\right) = \frac{1}{4}\lim\frac{(n+1)^{n+1}\dfrac{(2n+3)!}{((n+1)!)^3}}{n^n\dfrac{(2n+1)!}{(n!)^3}} = \frac{1}{4}4e = e.$$

d) $\lim \dfrac{2^n n^2 \operatorname{sen}(n!)}{\sqrt{5^n}} = \lim\left[\dfrac{n^2}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n}\operatorname{sen}(n!)\right] = 0$. Pela escala de sucessões tem-se

$\dfrac{n^2}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n} \to 0$, e como $\operatorname{sen}(n!)^n$ é limitada, tem-se $\dfrac{n^2}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n}\operatorname{sen}(n!) \to 0$.

(2 val.) **3.** Considere a sucessão (u_n) de números reais definida por:

$$\begin{aligned} u_1 &= 1, \\ u_{n+1} &= \frac{4u_n - 1}{5} \quad \text{(para todo o } n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

a) Tem-se $u_2 - u_1 = \dfrac{3}{5} - 1 = -\dfrac{2}{5} \leq 0$.
HI (hipótese de indução): $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
Tese: $u_{n+2} - u_{n+1} \leq 0$.
Demonstração (da tese):
$u_{n+2} - u_{n+1} = \dfrac{4u_{n+1}-1}{5} - \dfrac{4u_n - 1}{5} = \dfrac{4}{5}(u_{n+1} - u_n) \underset{\text{por HI}}{\leq} \dfrac{4}{5}0 = 0.$
Deste modo, tem-se: $u_{n+2} - u_{n+1} \leq 0$.
Logo, tem-se: $u_{n+1} - u_n \leq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e assim, a sucessão (u_n) é decrescente.

b) Tem-se

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| = \left|\frac{4u_{n+1}-1}{5} - \frac{4u_n - 1}{5}\right| = \frac{4}{5}|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{4}{5}|u_{n+1} - u_n|.$$

Logo, existe $c = \dfrac{4}{5} \in]0,1[$ tal que para todo o $n \in \mathbb{N}$ se tem

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq c\,|u_{n+1} - u_n|.$$

Deste modo, a sucessão (u_n) é contractiva. Logo, (u_n) é convergente.

Seja $l = \lim u_n$. Como (u_{n+1}) é uma subsucessão de (u_n), então (u_{n+1}) converge e

$$\lim u_{n+1} = \lim u_n = l$$

Logo, tem-se

$$\lim u_{n+1} = \lim \frac{4u_n - 1}{5} \Leftrightarrow l = \frac{4l-1}{5} \Leftrightarrow 5l = 4l - 1 \Leftrightarrow l = -1.$$

Logo, $\lim u_n = -1$.

(3 val.) **4.** Estude quanto à natureza (convergência absoluta, convergência simples, divergência) cada uma das seguintes séries e, relativamente às que forem convergentes, determine a soma de uma delas.

a) Tem-se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{-n+1}}{(-4)^n\, 6^{-n}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2\left(-\frac{3}{4}\right)^n$. A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2\left(-\frac{3}{4}\right)^n$ é uma série geométrica de razão $-\frac{3}{4}$. Como $\left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4} < 1$, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2\left(-\frac{3}{4}\right)^n$ converge absolutamente e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2\left(-\frac{3}{4}\right)^n = \frac{2\left(-\frac{3}{4}\right)}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{-\frac{6}{4}}{\frac{7}{4}} = -\frac{6}{7}.$$

b) Tem-se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-n)^n}{(n+1)^{n+1}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ e $\left|(-1)^n \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\right| = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $\alpha = 1 \leq 1$ a série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge e como se tem

$$\lim \frac{\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{1}{n}} = \lim \left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right) = \lim \frac{1}{e} \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-n)^n}{(n+1)^{n+1}}\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ também diverge, pelo Critério de Comparação.

Atendendo a que

$$\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{n+1} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to 0\frac{1}{e} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{n+1} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \text{ é decrescente,}$$

então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-n)^n}{(n+1)^{n+1}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ converge, pelo Critério de Leibniz.

Como a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-n)^n}{(n+1)^{n+1}}$ converge e a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-n)^n}{(n+1)^{n+1}}\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ diverge, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-n)^n}{(n+1)^{n+1}}$ converge simplesmente.

c) Tem-se $\dfrac{\log(3^n n)}{\sqrt{2n^2-1}} = \dfrac{n\log 3 + \log n}{\sqrt{2n^2-1}} = \dfrac{\log 3 + \dfrac{\log n}{n}}{\sqrt{2-\dfrac{1}{n^2}}} \to \dfrac{\log 3 + 0}{\sqrt{2-0}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\log 3 \neq 0$, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\log(3^n n)}{\sqrt{2n^2-1}}$ diverge.

Resolução alternativa: Tem-se $\dfrac{\log(3^n n)}{\sqrt{2n^2-1}} \geq \dfrac{\log 3}{\sqrt{2n^2-1}} \geq \dfrac{\log e}{\sqrt{2n^2-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2n^2-1}}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $\alpha = 1 \leq 1$ a série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ diverge e como se tem

$$\lim \frac{\dfrac{1}{\sqrt{2n^2-1}}}{\dfrac{1}{n}} = \lim \frac{n}{\sqrt{2n^2-1}} = \lim \frac{1}{\sqrt{2-\dfrac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2-0}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2n^2-1}}$ também diverge, pelo Critério de Comparação. Logo, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\log(3^n n)}{\sqrt{2n^2-1}}$ diverge, pelo Critério Geral de Comparação.

d) Tem-se $\dfrac{n^{n+2}}{3^n n!} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e

$$\lim \frac{\dfrac{(n+1)^{n+3}}{3^{n+1}(n+1)!}}{\dfrac{n^{n+2}}{3^n n!}} = \lim \left[\frac{1}{3(n+1)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{(n+1)^3}{n^2}\right] = \lim \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = \frac{e}{3} < 1.$$

Logo, pelo Critério de D'Alembert, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^{n+2}}{3^n n!}$ converge.

Como a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\dfrac{n^{n+2}}{3^n n!}\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^{n+2}}{3^n n!}$ converge, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^{n+2}}{3^n n!}$ converge absolutamente.

(1 val.) **5.** Estude quanto à natureza (convergência absoluta, convergência simples, divergência) a série de potências:

Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3^n}{n^3 2^n}(x+1)^n$.

Tem-se

$$R = \lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim \frac{\dfrac{3^n}{n^3 2^n}}{\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)^3 2^{n+1}}} = \lim \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \frac{2}{3}\right] = \frac{2}{3}.$$

Logo, a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n^3 2^n}(x+1)^n \begin{cases} \text{converge absolutamente se } |x+1| < \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow x \in \left]-\dfrac{5}{3}, -\dfrac{1}{3}\right[, \\ \\ \text{diverge se } |x+1| > \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -\dfrac{5}{3}\right[\cup \left]-\dfrac{1}{3}, +\infty\right[. \end{cases}$$

Para $x = -\frac{1}{3}$, tem-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n^3 2^n} (x+1)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$. Como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{1}{n^3} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ converge, por ser uma série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ com $\alpha = 3 > 1$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ converge absolutamente.

Para $x = -\frac{5}{3}$, tem-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n^3 2^n} (x+1)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^3}$. Como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n^3} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ converge então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^3}$ converge absolutamente.

Logo, a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n^3 2^n} (x+1)^n \begin{cases} \text{converge absolutamente se } x \in \left[-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right], \\ \\ \text{diverge se } x \in \left]-\infty, -\frac{5}{3}\right[\cup \left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[. \end{cases}$$

(1 val.) **6.** Seja (a_n) uma sucessão decrescente de números reais tal que $a_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Seja (b_n) uma sucessão de números reais positivos tal que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2$ converge. Indique, justificando, a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sqrt{a_n - a_{n+1}}$.

Tem-se $a_n - a_{n+1} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, uma vez que (a_n) é decrescente.

Como $0 \leq \left(b_n - \sqrt{a_n - a_{n+1}}\right)^2 = b_n^2 - 2b_n\sqrt{a_n - a_{n+1}} + a_n - a_{n+1}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, então tem-se

$$b_n^2 + (a_n - a_{n+1}) \geq 2b_n\sqrt{a_n - a_{n+1}}$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, como (a_n) é decrescente e $a_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, então (a_n) converge. Uma vez que (a_n) converge, então a série de Mengoli $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n+1})$ converge. Logo as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n+1})$ convergem, e assim, a série converge $\sum_{n=1}^{+\infty} 2b_n\sqrt{a_n - a_{n+1}}$, pelo Critério Geral de Comparação. Como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} 2b_n\sqrt{a_n - a_{n+1}}$ converge, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\sqrt{a_n - a_{n+1}}$ converge.

Como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|b_n\sqrt{a_n - a_{n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n\sqrt{a_n - a_{n+1}}$ converge, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\sqrt{a_n - a_{n+1}}$ converge absolutamente.