Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

15 de Novembro de 2004
Duração: 45 min.
Teste A

Resolução explicada do 2^o TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: Lic. Eng. Geológica e Mineira, Lic. Eng. de Materiais e Lic. Eng. Mecânica

I

Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:
$U = L(\{(1,0,-1),(0,-1,1)\})$ e $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y+z=0\}$.

a) Como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ e o conjunto $S = \{(1,0,-1),(0,-1,1),(0,0,1)\}$ é formado por 3 vectores de $\mathbb{R}^3$ linearmente independentes então o conjunto S é uma base de $\mathbb{R}^3$. Além disso, o conjunto S inclui os dois vectores que geram o subespaço U.

b) Tem-se $V = L(\{(1,0,0),(0,-1,1)\})$ e

$$\begin{aligned} U+V &= L(U \cup V) = L(\{(1,0,-1),(0,-1,1),(1,0,0),(0,-1,1)\}) = \\ &= L(\{(1,0,-1),(0,-1,1),(1,0,0)\}). \end{aligned}$$

Colocando os vectores do conjunto $S' = \{(1,0,-1),(0,-1,1),(1,0,0)\}$ como colunas de uma matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e usando o método de eliminação de Gauss, conclui-se que $\operatorname{car} A = 3$ e como tal $\operatorname{nul} A = 0$, isto é, os 3 vectores do conjunto S' são linearmente independentes. Logo, o conjunto S' é linearmente independente e gera o subespaço $U+V$, como tal é uma base do subespaço $U+V$ e $\dim(U+V) = 3$. Logo,

$$\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U+V) = 2+2-3 = 1.$$

II

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y) = (-4y-2x, 0, x+2y)$.

a) Tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(T) &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : T(x,y) = (0,0,0)\right\} = \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (-4y-2x, 0, x+2y) = (0,0,0)\right\} = \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = -2y\right\} = \\ &= L(\{(-2,1)\}). \end{aligned}$$

Como o conjunto $\{(-2,1)\}$ é linearmente independente e como gera o subespaço $\mathcal{N}(T)$ então $\{(-2,1)\}$ é uma base do subespaço $\mathcal{N}(T)$. Logo, $\dim \mathcal{N}(T) = 1$. Como $\mathcal{N}(T) \neq \{(0,0)\}$ então T não é injectiva.

b) Uma vez que

$$\dim \underbrace{\mathbb{R}^2}_{\text{espaço de partida}} = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T),$$

então $\dim \mathcal{I}(T) = 1$. Como $\dim \mathcal{I}(T) = 1 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$ então $\mathcal{I}(T) \neq \mathbb{R}^3$, isto é, T não é sobrejectiva.

c) Seja S a solução geral da equação $T(x, y) = (-2, 0, 1)$. Como o vector $(1, 0)$ é uma solução particular da equação $T(x, y) = (-2, 0, 1)$, tem-se

$$S = \{(1,0)\} + \mathcal{N}(T) = \{(1,0) + \lambda(-2,1) : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

III

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuja representação matricial em relação às bases canónicas (ordenadas) $\mathcal{B}_c^3$ e $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ respectivamente, é dada pela matriz:

$$M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Considere ainda as bases ordenadas $\mathcal{S}_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{S}_2 = \{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ com:

$$u_1 = (-1, 0, 1), \quad u_2 = (1, 1, 0), \quad u_3 = (0, 2, 1), \quad v_1 = (1, 1) \quad \text{e} \quad v_2 = (2, 1).$$

a) Tem-se

$$S_{\mathcal{B}_c^2 \to \mathcal{S}_2} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

uma vez que

$$(1,0) = -v_1 + v_2 \ \text{ e } \ (0,1) = 2v_1 - v_2.$$

Tem-se

$$S_{\mathcal{S}_1 \to \mathcal{B}_c^3} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $u_1 = -(1,0,0) + 0(0,1,0) + (0,0,1)$, $u_2 = (1,0,0) + (0,1,0) + 0(0,0,1)$ e $u_3 = 0(1,0,0) + 2(0,1,0) + (0,0,1)$.

b) Tem-se

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c^3) & \underset{T}{\xrightarrow{M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2)}} & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_c^2) \\ S_{\mathcal{B}_c^3 \to \mathcal{S}_1} \downarrow I & & I \downarrow S_{\mathcal{B}_c^2 \to \mathcal{S}_2} \\ (\mathbb{R}^3, \mathcal{S}_1) & \underset{M(T;\mathcal{S}_1;\mathcal{S}_2)}{\xrightarrow{T}} & (\mathbb{R}^2, \mathcal{S}_2) \end{array}$$

Logo,

$$\begin{aligned} M(T; \mathcal{S}_1; \mathcal{S}_2) &= S_{\mathcal{B}_c^2 \to \mathcal{S}_2} M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^2) \left(S_{\mathcal{B}_c^3 \to \mathcal{S}_1}\right)^{-1} = S_{\mathcal{B}_c^2 \to \mathcal{S}_2} M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^2) S_{\mathcal{S}_1 \to \mathcal{B}_c^3} = \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

IV

Seja $\{v_1, v_2\}$ uma base de um espaço linear U. Considere os vectores $w_1 = av_1 + bv_2$ e $w_2 = cv_1 + dv_2$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Queremos provar que $\{w_1, w_2\}$ é também uma base de U se e só se a matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ fôr invertível.

Como o conjunto $\{v_1, v_2\}$ é uma base do espaço linear U então $\dim U = 2$. Logo, se o conjunto $\{w_1, w_2\}$ fôr linearmente independente então será uma base do espaço linear U. Assim, bastará provar que o conjunto $\{w_1, w_2\}$ é linearmente independente se e só se a matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ fôr invertível.

Seja $\mathbf{0}$ o vector nulo do espaço linear U. Sejam $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tais que $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \mathbf{0}$. Queremos ver que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ se e só se a matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ fôr invertível.

Observe-se que

$$\begin{aligned} \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 &= \lambda_1(av_1 + bv_2) + \lambda_2(cv_1 + dv_2) \\ &= (\lambda_1 a + \lambda_2 c)v_1 + (\lambda_1 b + \lambda_2 d)v_2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\lambda_1 a + \lambda_2 c)v_1 + (\lambda_1 b + \lambda_2 d)v_2 = \mathbf{0}.$$

Como o conjunto $\{v_1, v_2\}$ é uma base do espaço linear U, em particular é linearmente independente. Logo,

$$\lambda_1 a + \lambda_2 c = \lambda_1 b + \lambda_2 d = 0 \in \mathbb{R}.$$

Isto é,

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ou seja, $A\lambda = \mathbf{0}'$, onde $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{0}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Como a equação $A\lambda = \mathbf{0}'$ apenas admite a solução trivial $\lambda = \mathbf{0}'$ se e só se a matriz A fôr invertível e como a matriz A é invertível se e só se a matriz $A^T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ fôr invertível, tem-se então o resultado pretendido.