Resolução do 2º TESTE (A) DE ÁLGEBRA LINEAR (11 de Maio de 2009)
CURSOS: LEMat, LEAN, MEAer, MEBiol, MEMec e MEQ

1) $\det A = \det \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = -24.$

$$\left(A^{-1}\right)_{(2,3)} = \frac{1}{\det A}\left((\operatorname{cof} A)^T\right)_{(2,3)} = -\frac{1}{24}(\operatorname{cof} A)_{(3,2)} = -\frac{1}{24}(-1)^{3+2}\det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}.$$

2) a) $\det \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\det \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\det \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} = \frac{18}{3} = 6.$

b) $\det\left(-\frac{1}{3}B^{-1}B^T\right) = \det\left(-\frac{1}{3}I\right)\det\left(B^{-1}\right)\det\left(B^T\right) = -\frac{1}{3^3}\det I \frac{1}{\det B}\det B = -\frac{1}{27}.$

3) Seja $A = M\left(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2\right)$. Como $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ é invertível, pois $\det A = 1 \neq 0$, T é injectiva. Logo, se a equação linear $T(x,y) = (1,2)$ tiver solução, ela é única. Como $\mathcal{C}(A) = \mathcal{I}(T)$ e uma vez que $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}(A)$ pois: $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, então $(1,0)$ é a solução única da equação linear $T(x,y) = (1,2)$.

Resolução alternativa da equação linear $T(x,y) = (1,2)$:
Como A é invertível, T é invertível e

$$T(x,y) = (1,2) \Leftrightarrow (x,y) = T^{-1}(1,2) = A^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4) Tem-se $M\left(T_1; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^1\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$, pois $T_1(1,0) = 0$ e $T_1(0,1) = 1$. Logo

$$M\left(T_2 \circ T_1; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2\right) = M\left(T_2; \mathcal{B}_c^1; \mathcal{B}_c^2\right) M\left(T_1; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^1\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e assim $\mathcal{N}(T_2 \circ T_1) = \mathcal{N}(M\left(T_2 \circ T_1; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2\right)) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(1,0)\}\right)$. Pelo que $\{(1,0)\}$ é base de $\mathcal{N}(T_2 \circ T_1)$, uma vez que $(1,0)$ é linearmente independente e gera $\mathcal{N}(T_2 \circ T_1)$.

5) Como $M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, tem-se $T(1,0,1) = 1(1,1) - (0,1) = (1,0)$, $T(0,1,1) = 0(1,1) + 0(0,1) = (0,0)$ e $T(1,0,1) = 1(1,1) - (0,1) = (1,0)$. Por outro lado, como $\mathcal{B}_1 = \{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ gera o "espaço de partida" $\mathbb{R}^3$, tem-se

$$\mathcal{I}(T) = L\left(\{T(1,0,1), T(0,1,1), T(0,0,1)\}\right) = L\left(\{(1,0)\}\right).$$

Pelo que $\{(1,0)\}$ é base de $\mathcal{I}(T)$, pois $(1,0)$ é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T)$.

Tem-se $\dim \mathcal{I}(T) = \operatorname{car}(M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2)) = \operatorname{car}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1$. Como $\mathcal{I}(T) \neq \mathbb{R}^2$, pois $\dim \mathcal{I}(T) = 1 \neq 2 = \dim \mathbb{R}^2$, então T não é sobrejectiva.