Instituto Superior Técnico | 3 de Junho de 2006
Departamento de Matemática | Duração: 1h e 30 min.
Secção de Álgebra e Análise | **Teste A**

Resolução do 2^o TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA I

CURSOS: LEAmb, LEB, LEGM, LEM, LEMat, LEQ e LQ

(1 val.) **1.** Sejam $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} k_1 e^{2-x} & \text{se } x \leq 2, \\ \\ \log(x-1) - k_2 & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

Determine k_1 e k_2 de modo a que f fique diferenciável em $\mathbb{R}$, e justifique que, com esses valores, a função f não tem extremos locais.

Resolução:

Como f é diferenciável no ponto 2, então f é contínua no ponto 2.

A função f é contínua no ponto 2 se e só se $f(2) = \lim\limits_{x\to 2} f(x)$. Tem-se

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (\log(x-1) - k_2) = -k_2,$$

e

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} k_1 e^{2-x} = k_1,$$

Como $f(2) = k_1$, então

$$f(2) = \lim_{x\to 2} f(x) \Leftrightarrow k_1 = -k_2.$$

A função f é diferenciável no ponto 2 se e só se $f'(2) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x-2} \in \mathbb{R}$. Tem-se

$$f'_d(2) = \lim_{x\to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\log(x-1) - k_2 - k_1}{x-2} \overset{k_1=-k_2}{=} \lim_{x\to 2^+} \frac{\log(x-1)}{x-2} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\overset{(\mathrm{RC})}{=}} \lim_{x\to 2^+} \frac{\frac{1}{x-1}}{1} = 1.$$

Por outro lado,

$$f'_e(0) = \lim_{x\to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{k_1 e^{2-x} - k_1}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} (-k_1) \frac{e^{2-x} - 1}{2-x} = -k_1.$$

Para f ser diferenciável no ponto $x = 2$ é preciso que se tenha

$$f'_e(2) = f'_d(2) \in \mathbb{R}.$$

Logo, f é diferenciável no ponto $x = 2$ se e só se $k_1 = -1$ e $k_2 = 1$.

Tem-se

$$f'(x) = \begin{cases} e^{2-x} & \text{se } x < 2, \\ \\ 1 & \text{se } x = 2, \\ \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

Como $f'(x) \neq 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}$, então f não tem extremos locais.

(2 val.) **2.** Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x-\operatorname{sen} x}{2x^2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{1/\log x}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sh} x}-\dfrac{1}{x}\right)$ **d)** $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2\log\cos\dfrac{1}{x}$

Resolução:

$$\textbf{a)}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x-\operatorname{sen} x}{2x^2}\underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\overset{\text{RC}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\operatorname{sen} x-\cos x}{4x}\underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\overset{\text{RC}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\cos x+\operatorname{sen} x}{4}=\frac{1}{2}.$$

$$\textbf{b)}\ \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{1/\log x}\underset{(\infty^0)}{=}\lim_{x\to 0^+}e^{\log\left(\frac{1}{x}\right)^{1/\log x}}=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{\log\left(\frac{1}{x}\right)}{\log x}}=e^{-1}=\frac{1}{e},\text{ uma vez que}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log\left(\frac{1}{x}\right)}{\log x}\underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\overset{\text{RC}}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{\frac{1}{x}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}(-1)=-1.$$

Em alternativa:

$$\textbf{b)}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{1/\log x}\underset{(\infty^0)}{=}\lim_{x\to 0^+}e^{\log\left(\frac{1}{x}\right)^{1/\log x}}=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{\log\left(\frac{1}{x}\right)}{\log x}}=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{\log x^{-1}}{\log x}}=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{-\log x}{\log x}}=\lim_{x\to 0^+}e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

$$\textbf{c)}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\operatorname{sh} x}-\frac{1}{x}\right)\underset{(+\infty-\infty)}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\operatorname{sh} x}{x\operatorname{sh} x}\underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\overset{\text{RC}}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x+x\operatorname{ch} x}\underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\overset{\text{RC}}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{-\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x+\operatorname{ch} x+x\operatorname{sh} x}=\frac{0}{2}=0.$$

$$\textbf{d)}\lim_{x\to+\infty}x^2\log\cos\frac{1}{x}\underset{(\infty 0)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}\underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\overset{\text{RC}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{\cos\frac{1}{x}}\left(-\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right)\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{-\dfrac{2}{x^3}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\cos\frac{1}{x}}\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\left(-\frac{1}{2}\right).1.1=-\frac{1}{2}.$$

(1,5 val.) **3.** Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2} & \text{se } x\leq -1,\\[2ex] \dfrac{\log^3(x+1)^2}{6} & \text{se } x>-1.\end{cases}$$

a) Diga, justificando, qual o valor de $\lim f\left(-2-\dfrac{1}{n}\right)$.

b) Determine, justificando, a função derivada f'.

Resolução:

a) Como f é contínua em $]-\infty,-1[$, então f é contínua em -2. Logo $f(-2) = \lim_{x\to-2} f(x)$. Como $-2-\frac{1}{n} \to -2$ e o $\lim_{x\to-2} f(x)$ existe, então $\lim f\left(-2-\frac{1}{n}\right) = \lim_{x\to-2} f(x)$, e assim

$$\lim f\left(-2-\frac{1}{n}\right) = \lim_{x\to-2} f(x) = f(-2) = -\frac{3}{4}.$$

b) f é diferenciável em $]-1,+\infty[$ e tem-se

$$f'(x) = \left(\frac{\log^3(x+1)^2}{6}\right)' = 3\frac{1}{6}\log^2(x+1)^2\frac{1}{(x+1)^2}2(x+1) = \frac{\log^2(x+1)^2}{x+1},$$

para todo o $x \in]-1,+\infty[$.

Por outro lado, f é diferenciável em $]-\infty,-1[$ e tem-se $f'(x) = -\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}$, para todo o $x \in]-\infty,-1[$.

Tem-se

$$f'_d(-1) = \lim_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to-1^+}\frac{\frac{\log^3(x+1)^2}{6}}{x+1} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty.$$

Como $f'_d(-1)$ não é finita, então f não é diferenciável em $x=-1$.

A função derivada $f' : \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R}$ é definida por

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3} & \text{se } x < -1, \\ \frac{\log^2(x+1)^2}{x+1} & \text{se } x > -1. \end{cases}$$

(1.5 val.) **4.** Determine, justificando, o contradomínio da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1} - 2 & \text{se } x \leq 0, \\ \frac{e^{2/x}}{2} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Resolução:

f é diferenciável em $]-\infty,0[$ e tem-se $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$, para todo o $x \in]-\infty,0[$.

Por outro lado, f é diferenciável em $]0,+\infty[$ e tem-se $f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{2/x}$, para todo o $x \in]0,+\infty[$.

Assim, como $f'(x) < 0$, para todo o $x \in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$, então f é estritamente decrescente em $]-\infty,0[$ **e em** $]0,+\infty[$.

(**Em alternativa**, bastaria ter-se observado que em $]0,+\infty[$, f é estritamente decrescente por se tratar de uma composta de uma função crescente (e^x) com uma função decrescente ($\frac{2}{x}$), e em $]-\infty,0[$ tem-se

$$\frac{x}{x-1} - 2 = \frac{x-1+1}{x-1} - 2 = \frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{x-1} - 2 = -1 + \frac{1}{x-1}$$

e esta é claramente uma função decrescente.)

Como f é contínua e estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$, então, pelo Teorema de Bolzano, tem-se

$$f\left(]-\infty, 0[\right) = \left]\lim_{x\to 0^-} f(x), \lim_{x\to -\infty} f(x)\right[=]-2, -1[\,,$$

pois $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x-1} - 2\right) \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\overset{\text{RC}}{=}} \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{1} - 2\right) = -1,$

e

$$f\left(]0, +\infty[\right) = \left]\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to 0^+} f(x)\right[= \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[.$$

Logo, o contradomínio de f é dado por

$$f(\mathbb{R}) = f\left(]-\infty, 0[\right) \cup \{f(0)\} \cup f\left(]0, +\infty[\right) = [-2, -1[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[.$$

(1.5 val.) **5.** Determine, justificando, os intervalos de monotonia e os extremos locais da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x - 5\,\text{arctg}\, x$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Resolução:

A função f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e tem-se $f'(x) = 1 - \frac{5}{1+x^2}$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Assim,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{5}{1+x^2} \Leftrightarrow (x = -2 \text{ ou } x = 2).$$

Como $f'(x) > 0$, para todo o $x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$, então f é estritamente crescente em $]-\infty, -2[$ **e em** $]2, +\infty[$. Como f é contínua nos pontos $x = -2$ e $x = 2$, então f é estritamente crescente em $]-\infty, -2]$ **e em** $[2, +\infty[$.

Como $f'(x) < 0$, para todo o $x \in]-2, 2[$, então f é estritamente decrescente em $]-2, 2[$. Como f é contínua nos pontos $x = 2$ e $x = -2$, então f é estritamente decrescente em $[-2, 2]$.

Como f é estritamente crescente em $]-\infty, -2]$ e estritamente decrescente em $[-2, 2]$, então $f(-2)$ é um máximo local de f.

Como f é estritamente decrescente em $[-2, 2]$ e estritamente crescente em $[2, +\infty[$, então $f(2)$ é um mínimo local de f.

(1 val.) **6.** Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 6x^2 - e^{-x-2} + 2x^3 - 3$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f tem exactamente 3 zeros.

Resolução:

f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $f'(x) = 12x + e^{-x-2} + 6x^2$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

f' é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $(f')'(x) = f''(x) = 12 - e^{-x-2} + 12x$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

f'' é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $(f'')'(x) = f'''(x) = e^{-x-2} + 12$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

A função f não pode ter mais que 3 zeros, pois se tivesse, pelo Teorema de Rolle aplicado sucessivamente a f, f' e f'', a função f''' teria um zero, o que não pode ser pois $f'''(x) \neq 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Por outro lado,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(6x^2 - e^{-x-2} + 2x^3 - 3\right) = \lim_{x\to-\infty} e^{-x-2}\left(\frac{6x^2 + 2x^3 - 3}{e^{-x-2}} - 1\right) =$$

$$\underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\overset{\text{RC}}{=}} (+\infty) \lim_{x\to-\infty}(0 - 1) = -\infty,$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Como f é contínua em $]-\infty,-1]$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) < 0$ e $f(-1) = 1 - e^{-1} > 0$, então, pelo teorema de Bolzano, existe $c_1 \in \,]-\infty,-1[$ tal que $f(c_1) = 0$.

Como f é contínua em $[-1,0]$, $f(-1) > 0$ e $f(0) = -3 - e^{-2} < 0$, então, pelo teorema de Bolzano, existe $c_2 \in \,]-1,0[$ tal que $f(c_2) = 0$.

Como f é contínua em $[0,+\infty[$, $f(0) < 0$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) > 0$, então, pelo teorema de Bolzano, existe $c_3 \in \,]0,+\infty[$ tal que $f(c_3) = 0$.

Assim, f tem pelo menos 3 zeros (distintos), e como já se viu, f não pode ter mais que 3 zeros.

Logo, f tem exactamente 3 zeros.

(1 val.) **7.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt[3]{2-x}$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Determine o polinómio de Taylor de 1^a ordem da função f relativo ao ponto 1.

Resolução:

O polinómio de Taylor de ordem 1 relativamente à função f e ao ponto $x_0 = 1$, é dado por:

$$P_1(x) = f(1) + f'(1)(x-1).$$

Seja $f(x) = \sqrt[3]{2-x}$. Tem-se $f'(x) = -\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(2-x)^2}}$, para todo o $x \neq 2$. Logo $f'(1) = -\dfrac{1}{3}$.

Assim, tem-se

$$P_1(x) = 1 - \frac{1}{3}(x-1).$$

(0.5 val.) **8.** Mostre que $\operatorname{arcsen} x + \arccos x > \operatorname{arctg} x$, para todo o $x \in [-1,1]$.

Resolução:

Seja $F(x) = \operatorname{arcsen} x + \arccos x$. Tem-se

$$F'(x) = (\operatorname{arcsen} x + \arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

para todo o $x \in \,]-1,1[$. Logo, existe uma constante $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$F(x) = k,$$

para todo o $x \in \,]-1,1[$. Como F é contínua em $[-1,1]$, então tem-se

$$F(x) = k,$$

para todo o $x \in [-1,1]$.

Mas, por exemplo,

$$F(0) = \operatorname{arcsen} 0 + \arccos 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Logo, tem-se $k = \frac{\pi}{2}$, e assim

$$\operatorname{arcsen} x + \arccos x = \frac{\pi}{2} > \operatorname{arctg} x,$$

para todo o $x \in [-1,1]$.