Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

29 de Novembro de 2004
Duração: 45 min.
Teste A

Resolução do 3^o TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: Lic. Eng. Geológica e Mineira, Lic. Eng. de Materiais e Lic. Eng. Mecânica

I

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8.$$

$$\left(A^{-1}\right)_{(2,2)} = \frac{1}{\det A}\left((\operatorname{cof} A)^T\right)_{(2,2)} = \frac{1}{8}(\operatorname{cof} A)_{(2,2)} = \frac{1}{8}(-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

II

(i) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & b & 1 \\ c & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$ **(ii)** $\begin{vmatrix} a+3 & -1 & -2 \\ b+3 & b-2 & -2 \\ c+3 & 2-c & -c \end{vmatrix} = -2$ **(iii)** $\det\left(\frac{1}{2}B^TB\right) = \frac{1}{2}$

III

a) $A = M(T; B_c^3; B_c^3)$.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(3-\lambda).$$

$$\det(A-\lambda I) = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 1 \quad \text{ou} \quad \lambda = 3).$$

Os valores próprios de T são 1 e 3.

b) $\lambda_1 = 1,\ E_{\lambda_1} = \mathcal{N}(A - \lambda_1 I) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) =$
$= L(\{(1,0,-1),(0,1,-1)\})$. Uma base para E_{λ_1}: $\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$.

$\lambda_2 = 3,\ E_{\lambda_2} = \mathcal{N}(A - \lambda_2 I) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right) =$
$L(\{(0,1,1)\})$. Uma base para E_{λ_2}: $\{(0,1,1)\}$.

c) $\mathcal{S} = \{(1,0,-1),(0,1,-1),(0,1,1)\}$.

$$M(T;\mathcal{S};\mathcal{S}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

IV

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Atendendo a que $\det(AB - 0I) = \det(AB) = \det(BA) = \det(BA - 0I)$,

$$0 \text{ é valor próprio de } AB \text{ se e só se } 0 \text{ é valor próprio de } BA.$$

Seja λ um valor próprio de AB, com $\lambda \neq 0$. Então existe $u \neq \mathbf{0}$ tal que $ABu = \lambda u$. Seja $w = Bu$. Como $u \neq \mathbf{0}$ e $\lambda \neq 0$ então $w \neq \mathbf{0}$. Logo,

$$(BA)\,w = (BA)\,Bu = B\,(AB)\,u = B\lambda u = \lambda\,(Bu) = \lambda w.$$

Isto é, λ é valor próprio de BA com w como vector próprio associado.

Analogamente, se λ fôr valor próprio de BA então λ é valor próprio de AB.