Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

8 de Junho de 2009
Duração: 50 min.
Teste A

Soluções do 3^o TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: LEMat, LEAN, MEAer, MEBiol, MEMec e MEQ

1) a) O conjunto $\{(0,1,1),(0,0,1)\}$ gera U e é linearmente independente logo é uma base de U. Atendendo ao método de ortogonalização de Gram-Schmidt, uma base ortogonal para U é: $\{u_1,u_2\}$ em que $u_1=(0,1,1)$ e $u_2=(0,0,1)-\mathrm{Proj}_{(0,1,1)}(0,0,1)=(0,0,1)-\frac{\langle(0,0,1),(0,1,1)\rangle}{\|(0,1,1)\|^2}(0,1,1)=$
$=(0,0,1)-\frac{1}{2}(0,1,1)=\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Assim uma base ortogonal para U é: $\left\{(0,1,1),\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}$.
Tem-se $V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: y-z=0\right\}=\{(x,y,y): x,y\in\mathbb{R}\}=L\left(\{(1,0,0),(0,1,1)\}\right)$.
Atendendo a que $\langle(1,0,0),(0,1,1)\rangle=0$, uma base ortonormada para V é:
$\left\{\frac{(1,0,0)}{\|(1,0,0)\|},\frac{(0,1,1)}{\|(0,1,1)\|}\right\}=\left\{(1,0,0),\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$.

b) Como $U^\perp=\left(L\left(\left\{(0,1,1),\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}\right)\right)^\perp=\{(1,0,0)\}$, uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ que inclui dois vectores geradores de U é: $\left\{(1,0,0),\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$.
Como $V^\perp=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: y-z=0\}^\perp=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\langle(x,y,z),(0,1,-1)\rangle=0\}^\perp=$
$=\left(\left(L\left(\{(0,1,-1)\}\right)\right)^\perp\right)^\perp=L\left(\{(0,1,-1)\}\right)$, e atendendo à alínea anterior, uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ que inclui dois vectores geradores de V é: $\left\{(1,0,0),\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$.

c) O elemento de U mais próximo de $(1,1,1)$ é: $P_U(1,1,1)=(1,1,1)-P_{U^\perp}(1,1,1)=$
$=(1,1,1)-\langle(1,1,1),(1,0,0)\rangle(1,0,0)=(0,1,1)$.
A distância entre $(1,1,1)$ e $V^\perp$ é: $d\left((1,1,1),V^\perp\right)=\|P_V(1,1,1)\|\underset{(1,1,1)\in V}{=}\|(1,1,1)\|=\sqrt{3}$.

2) a) Os valores próprios de A são os valores de λ para os quais $\det(A-\lambda I)=0$. Como $\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}4-\lambda & 2\\ 2 & 4-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)^2-4=\lambda^2-8\lambda+12=(\lambda-2)(\lambda-6)$, os valores próprios de A são $\lambda_1=2$ e $\lambda_2=6$.
O subespaço próprio E_{λ_1} associado a λ_1 é dado por $E_{\lambda_1}=\mathcal{N}(A-\lambda_1 I)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}2&2\\2&2\end{bmatrix}\right)=$
$=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}2&2\\0&0\end{bmatrix}\right)=L\left(\{(-1,1)\}\right)$. O subespaço próprio E_{λ_2} associado a λ_2 é dado por $E_{\lambda_2}=$
$=\mathcal{N}(A-\lambda_2 I)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}-2&2\\2&-2\end{bmatrix}\right)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}-2&2\\0&0\end{bmatrix}\right)=L\left(\{(1,1)\}\right)$.

b) Como os dois valores próprios são distintos, os vectores próprios associados a cada um deles formam um conjunto (de dois vectores) linearmente independente. Logo, como existe uma base de $\mathbb{R}^2$ formada por vectores próprios ($\{(-1,1),(1,1)\}$), a matriz $A\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ é diagonalizável.
Seja $P^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1\\1&1\end{bmatrix}$. Tem-se então $PAP^{-1}=D=\begin{bmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\0&6\end{bmatrix}$.

3) Se λ é um valor próprio de AB, existe $u\neq\mathbf{0}$ tal que $ABu=\lambda u$. Seja $v=Bu$. Como $u\neq\mathbf{0}$ e B é invertível então $v\neq\mathbf{0}$. Tem-se então $(BA)v=(BA)Bu=B(ABu)=B\lambda u=\lambda Bu=\lambda v$, com $v\neq\mathbf{0}$, isto é, λ é um valor próprio de BA.