Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

17 de Dezembro de 2004
Duração: 45 min.
Teste A

Resolução do 4^o TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: Lic. Eng. Geológica e Mineira, Lic. Eng. de Materiais e Lic. Eng. Mecânica

I

a) Sejam $u_1 = (1, 0, -1)$ e

$$\begin{aligned} u_2 &= (0,-1,1) - \mathrm{proj}_{(1,0,-1)}(0,-1,1) = \\ &= (0,-1,1) - \frac{\langle (0,-1,1),(1,0,-1)\rangle}{\|(1,0,-1)\|^2}(1,0,-1) = \\ &= (0,-1,1) - \frac{-1}{2}(1,0,-1) = (1/2,-1,1/2). \end{aligned}$$

Logo, o conjunto $\{u_1, u_2\}$ é uma base ortogonal para U.

b) O conjunto

$$\left\{ \frac{1}{\|u_1\|}u_1, \frac{1}{\|u_2\|}u_2 \right\} = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right) \right\}$$

é uma base ortonormada para U.

Uma vez que

$$\begin{aligned} U^\perp &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z),(1,0,-1)\rangle = 0 \;\text{ e }\; \langle (x,y,z),(0,-1,1)\rangle = 0\right\} = \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z \;\text{ e }\; y = z\right\} = L\left(\{(1,1,1)\}\right), \end{aligned}$$

o conjunto $\left\{\frac{1}{\|(1,1,1)\|}(1,1,1)\right\} = \left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\}$ é uma base ortonormada para $U^\perp$.

Logo, o conjunto

$$\left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \right\}$$

é uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ que inclui dois vectores geradores de U.

c) Tem-se

$$P_{U^\perp}(1,0,0) = \left\langle (1,0,0), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \right\rangle \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

d) Tem-se

$$\begin{aligned} d\left((1,0,0), U^\perp\right) &= \|P_U(1,0,0)\| = \|(1,0,0) - P_{U^\perp}(1,0,0)\| = \\ &= \left\|(1,0,0) - \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\| = \left\|\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right\| = \frac{\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$

II

a) Sejam $p(t), q(t) \in P_2$, isto é, $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ e $q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$, com $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Tem-se

$$\left\langle a_0 + a_1 t + a_2 t^2, b_0 + b_1 t + b_2 t^2 \right\rangle = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Assim, a aplicação $\langle , \rangle$ é desde logo bilinear. Além disso, atendendo a que a matriz $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ é simétrica e todos os seus valores próprios (1 e 2) são positivos, conclui-se que a aplicação $\langle , \rangle$ define em P_2 um produto interno.

b) Tem-se

$$\begin{aligned} W &= \left\{ p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in P_2 : p(0) = p(1) \ \text{ e } \ p(1) = p(-1) \right\} = \\ &= \left\{ p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in P_2 : a_1 = -a_2 \ \text{ e } \ a_1 = 0 \right\} = \\ &= \{ p(t) = a_0 : a_0 \in \mathbb{R} \} = L(\{1\}). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} W^\perp &= \left\{ p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in P_2 : \left\langle a_0 + a_1 t + a_2 t^2, 1 \right\rangle = 0 \right\} = \\ &= \left\{ p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in P_2 : a_0 = 0 \right\} = L\left(\left\{ t, t^2 \right\} \right). \end{aligned}$$

Assim, o conjunto $\left\{ \frac{1}{\|t\|} t, \frac{1}{\|t^2\|} t^2 \right\} = \left\{ t, \frac{\sqrt{2}}{2} t^2 \right\}$ é uma base ortonormada para $W^\perp$.

III

Atendendo a que T é invertível se e só se $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$, bastará ver que $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$ se e só se $k = n$.

Se $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$ então teremos $k = n$, caso contrário, isto é, caso $k < n$ ter-se-ia

$$\left(L\left(\{ u_1, ..., u_k \} \right) \right)^\perp \neq \{\mathbf{0}\}.$$

Assim, para $v \in \left(L\left(\{ u_1, ..., u_k \} \right) \right)^\perp$, com $v \neq \mathbf{0}$, teríamos $T(v) = \mathbf{0}$, ou seja $\mathcal{N}(T) \neq \{\mathbf{0}\}$. O que não pode ser pois suposemos $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$. Logo, se $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$ então tem-se $k = n$.

Suponhamos agora que se tem $k = n$. Nesse caso, o conjunto $\{u_1, ..., u_n\}$ é uma base de V. Queremos ver que se tem $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$. Seja $v \in V$ tal que $T(v) = \mathbf{0}$. Logo,

$$\sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i \rangle \, u_i = \mathbf{0}.$$

Assim, atendendo a que o conjunto $\{u_1, ..., u_n\}$ é linearmente independente, tem-se $\langle v, u_i \rangle = 0$, para todo o $i = 1, ..., n$. Finalmente, como o conjunto $\{u_1, ..., u_n\}$ gera V, tem-se $\langle v, u \rangle = 0$, para qualquer $u \in V$. Logo $v = \mathbf{0}$ e assim $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$.