Exercícios de
ANÁLISE NUMÉRICA

2^o Semestre 2001/2002

Nota. Em cada capítulo é apresentado, além dos exercícios básicos, a resolver nas aulas práticas, um conjunto de exercícios complementares. No final, a seguir ao capítulo VI, incluiu-se ainda uma lista de exercícios propostos em exames. Recomenda-se aos alunos que, depois de terem estudado a matéria, tentem resolver esses problemas fora das aulas e apresentem as suas dúvidas aos docentes, durante os horários de atendimento.

Estas folhas terminam com um formulário contendo as principais fórmulas e notações usadas.

Capítulo I
Teoria dos erros

Notações

No que se segue, x designa um número real e $\tilde{x}$ um valor aproximado de x, $x \simeq \tilde{x}$.

$|e_x| = |x - \tilde{x}|$ é o *erro absoluto* de $\tilde{x}$ em relação a x.
Seja $\delta_x = \frac{x-\tilde{x}}{x}$ se $x \neq 0$, então
$|\delta_x|$ é o *erro relativo* de $\tilde{x}$ em relação a x.
O valor $100\ |\delta_x|$, em percentagem, representa a *percentagem de erro*

Nos exercícios deste capítulo os números são representados em base decimal.

1. Represente x em vírgula flutuante com 4 dígitos e arredondamento simétrico, nos seguintes casos

a) $x = 1/6$	b) $x = 1/3$	c) $x = -83784$
d) $x = -83785$	e) $x = 83798$	f) $x = 0.0013296$

Cancelamento subtractivo

2. Deduza a seguinte fórmula para δ_z, onde $z = x - y$, sendo x e y números reais

$$\delta_z = \frac{e_z}{z} = \frac{x}{x-y}\left(\frac{e_x}{x}\right) - \frac{y}{x-y}\left(\frac{e_y}{y}\right) = \frac{x}{x-y}\frac{e_x}{x} - \frac{y}{x-y}\frac{e_y}{y}$$

Conclua que o erro relativo de z, $|\delta_z|$, pode ser muito grande, mesmo que o erro absoluto seja pequeno quando x e y são próximos. Como ilustração, considere os dois exercícios seguintes.

3. Considere os números $x = \pi$ e $y = 2199/700$.

   a) Pretendem-se aproximações $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ de x e y, respectivamente, com erros absolutos não excedendo 0.0005. Escolha $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ com 4 dígitos na mantissa, usando arredondamento simétrico. Obtenha ainda $\tilde{x} - \tilde{y}$.

   b) Calcule os erros absolutos e relativos de $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ e de $\tilde{x} - \tilde{y}$, bem como as percentagens de erro. Comente.

   c) Com o objectivo de ilustrar a influência nos resultados da precisão utilizada, represente em vírgula flutuante com 6 algarismos na mantissa os números x e y. Determine $fl(\,fl(x) - fl(y)\,)$ e o respectivo erro relativo. Houve melhoria nos resultados em relação a b) ?

4. Na equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$, admita-se que os coeficientes são todos positivos e exactos e que $b^2 \gg ac$. Como é sabido, as duas raizes da equação são dadas por

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

   Faça $a = 1$, $b = 62.10$ e $c = 1$. A equação correspondente tem raizes $x_1 \simeq -0.01610723$ e $x_2 \simeq -62.08390$. Usando aritmética de vírgula flutuante com 4 dígitos e arredondamento simétrico, obtenha aproximações para x_1 e x_2. Dê uma explicação para o mau valor que obteve para x_1 e proponha uma maneira alternativa de calcular essa raiz.

Propagação dos erros no método de Gauss
Estratégia de pesquisa de pivot

5. Devido ao uso de aritmética não exacta, o método de Gauss pode conduzir a soluções totalmente erradas. Como exemplo, considere o seguinte sistema de equações:

$$(I)\left\{\begin{array}{llll} 0.003000\,x_1 & + & 59.14\,x_2 & = & 59.17 \\ 5.291\,x_1 & - & 6.130\,x_2 & = & 46.78 \end{array}\right.$$

   com solução exacta $x_1 = 10.00$ e $x_2 = 1.000$. Suponha que efectua os cáculos no sistema VF(10, 4, -10, 10), com arredondamento simétrico. Compare os resultados obtidos pelo método de eliminação de Gauss, com e sem pesquisa parcial de pivot.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

6. Tomaram-se para valores aproximados de $N_1 = 0.3000 \times 10^1$, $N_2 = 0.3000 \times 10^{-3}$ e $N_3 = 0.3000 \times 10^4$, respectivamente os valores $\tilde{N}_1 = 0.3100 \times 10^1$, $\tilde{N}_2 = 0.3100 \times 10^{-3}$ e $\tilde{N}_3 = 0.3100 \times 10^4$. Determine os respectivos erros absolutos e relativos, bem como as percentagens de erro. Comente sobre os valores obtidos.

7. Consideremos o sistema linear $A\,x = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 10^{-6} & 0 & 1 \\ 1 & 10^{-6} & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Representando os números com seis dígitos na mantissa, resolva este sistema pelo método da eliminação de Gauss

(a) sem pesquisa de pivot;

(b) com pesquisa parcial de pivot.

Compare os resultados e comente.

8. Considere os dois seguintes sistemas de equações (equivalentes):

$$(I)\begin{cases} 0.00005x + y = 0.5 \\ x + y = 1 \end{cases} \qquad (II)\begin{cases} x + 20000y = 10000 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Supondo que efectua os cáculos no sistema decimal com 4 dígitos, analise as vantagens da selecção de pivot na resolução de cada um dos sistemas. Qual o tipo de selecção que deveria utilizar em cada um dos casos?

9. Considere a função real de variável real

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2} \tag{1}$$

(a) Calcule $f(10^{-6})$ utilizando a fórmula (1).

(b) Obtenha uma aproximação de $f(10^{-6})$, utilizando o desenvolvimento de f em série de Taylor, em torno de $x = 0$.

(c) Sabendo que $1-\cos x = 2\,\sin^2(x/2)$, calcule $f(10^{-6})$ utilizando uma nova fórmula para f.

(d) Compare os valores obtidos nas alíneas anteriores e comente.

Capítulo I I
Métodos iterativos para equações não lineares

1. Considere a equação $\sin x - e^{-x} = 0$.

   (a) Prove que esta equação tem uma raiz $z \in [0.5, 0.7]$.

   (b) Efectue uma iteração pelo método da bissecção e indique um novo intervalo que contenha z.

   (c) Determine o número m de iterações necessárias para garantir $|z - x_m| < 10^{-6}$.

2. Considere a equação
$$3x^2 - e^x = 0 \tag{2}$$

   (a) Localize graficamente as raízes da equação (2) e indique intervalos de comprimento unitário que as contenham.

   (b) Considere a seguintes sucessões
$$(S1) \quad x_{m+1} = \sqrt{\frac{e^{x_m}}{3}} \qquad (S2) \quad x_{m+1} = \ln(3x_m^2)$$
   Mostre que é possível obter aproximações das raízes positivas da equação 2 usando, para cada raiz, uma dessas sucessões. Indique, em cada caso, um intervalo onde poderá escolher a iterada inicial x_0.

   (c) Efectue duas iterações usando a sucessão (S1) com $x_0 = 1$. Estime o número de algarismos significativos da aproximação obtida.

   (d) Será possível usar a sucessão (S1) para aproximar a maior raiz positiva da equação ? E poderá usar a sucessão (S2) para aproximar a menor raiz positiva da equação ?

3. Considere uma sucessão de números reais, definida do seguinte modo:
$$z_0 = 1, \quad z_{k+1} = 1 - \frac{1}{bz_k}, \quad (k = 0, 1, 2, ...)$$
   onde b é um número real dado.

   (a) Com base no teorema do ponto fixo, mostre que, se $b > 4$ esta sucessão converge e que todos os seus termos estão compreendidos no intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$

   (b) Seja $b = \frac{25}{4}$. Através da definição de ponto fixo, calcule $z = \lim_{k\to\infty} z_k$.

   (c) Para esse valor de b, mostre que todos os termos da sucessão pertencem ao intervalo $[\frac{4}{5}, 1]$ e que se verifica
$$|z_{k+1} - z| \leq \frac{4}{75}\left(\frac{1}{4}\right)^k, \quad (k = 0, 1, 2, ...)$$

(*TESTE 16.12.95*)

4. Seja a função
$$g(x) = \frac{1}{3}\ln(x^2+1)$$
   (a) Prove que a sucessão definida por
$$x_{m+1} = \frac{1}{3}\ln(x_m^2+1), \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$
   converge para um número $z \in [-1, 1]$. Determine z e a ordem de convergência.

   (b) Efectue algumas iterações, começando com $x_0 = 5$, e calcule os quocientes
$$\frac{|e_1|}{(e_0)^2}, \quad \frac{|e_2|}{(e_1)^2}, \frac{|e_3|}{(e_2)^2}, \ldots$$
   Os resultados parecem estar de acordo com o que provou na alínea anterior ?

5. Pretende-se determinar, utilizando o método de Newton, a maior das duas raízes positivas da equação
$$-x^3 + 14x - 1 - e^x = 0.$$
   (a) Mostre que se x_0 for escolhido no intervalo [2.6,3], estão asseguradas as condições de convergência do método.

   (b) Calcule um majorante para o erro da segunda iterada (não efectue iterações). (*EXAME 18.01.93*)

6. Considere os seguintes métodos para obter um valor aproximado de $\sqrt{10}$:

   (a) método de Newton aplicado à função $f(x) = x^2 - 10$. Mostre que se escolher $x_0 = 4^*$ então o método de Newton converge e a ordem é dois. Calcule três iteradas e determine um majorante para o erro de x_3. Quantos algarismos significativos pode garantir ? (* Note que pode concluir convergência se escolher para x_0 qualquer valor ≥ 4)

   (b) método de Newton aplicado à função $f(x) = x^{-1/2}(x^2 - 10)$. Admitindo que o método converge, mostre que a ordem de convergência é 3.

7. Mostre que a equação
$$\ln x - (x-2)^2 \; = \; 0$$
   tem 2 e só 2 raízes reais distintas e indique, para cada uma delas, um intervalo (de comprimento não superior a 2) que a contenha (sem conter a outra). Se pretendesse utilizar o método de Newton para calcular a raiz mais pequena, diga, justificando, qual (ou quais) dos seguintes valores poderia utilizar como aproximação inicial: $x_0 = 2.1$, $x_0 = 2.5$ ou $x_0 = 1.4$? Mostre que para o x_0 que escolheu estão garantidas as condições de convergência e efectue uma iteração.

8. Considere a equação
$$f(x) = x\tan(x) - 1 = 0,$$
Aplicando o método da secante, obtenha as três primeiras iteradas para o cálculo da raiz situada no intervalo $[0.8, 0.9]$. Determine um majorante do erro do resultado obtido.

9. A equação $x^2 = a$, com $a > 0$, pode escrever-se sob a forma $x = g(x)$, onde $g(x) = \frac{a}{x}$. Considere o método do ponto fixo para aproximar a raiz positiva da equação. Mostre que o método é divergente qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \neq \sqrt{a}$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

10. Considere de novo a equação $3x^2 - e^x = 0$ considerada no exercício 2. Determine uma função iteradora $g(x)$ tal que o método do ponto fixo associado convirja para a raiz negativa da equação.

11. Considere a função de variável real
$$g(x) = \frac{1 + e^x + x^3}{14}$$
   (a) Sendo $\{x_m\}$ a sucessão numérica definida por $x_{m+1} = g(x_m), m = 0, 1, ...,$ mostre que esta sucessão tem um limite finito $z \in [0, 1]$, qualquer que seja $x_0 \in [0, 1]$.
   (b) Verifique que a função g tem um (único) ponto fixo no intervalo [2,3]. Poderá usar, para a sua determinação, o método iterativo baseado na função iteradora g ?
   (*EXAME 18.01.93*)

12. Pretende-se determinar uma raiz da equação $x = \phi(x)$ pelo método do ponto fixo com um erro absoluto inferior a 0.5×10^{-4}. Suponha que foram obtidas as iteradas
$$x_4 = 0.43789 \qquad\qquad x_5 = 0.43814$$
Sabendo que $|\phi^{'}(x)| \leq 0.4$, determine o número de iterações que tem ainda de se efectuar até atingir a precisão pretendida.
(*EXAME 10.01.93*)

13. Para calcular a raiz quadrada do número $a > 0$ recorre-se frequentemente ao seguinte método iterativo
$$x_{m+1} = \frac{1}{2}(x_m + \frac{a}{x_m}), \qquad\qquad m = 0, 1, \cdots$$
   (a) Verifique que esta fórmula corresponde à utilização do método de Newton para resolver o problema.

(b) Mostre que o erro do método satisfaz a condição

$$e_{m+1} = -\frac{e_m^2}{2x_m},$$

onde $e_{m+1} = z - x_{m+1}$.

14. Para obter um valor aproximado da raiz cúbica de um número real a, pretende-se utilizar o método da secante.

    (a) Escreva a fórmula iteradora do método para um valor de a arbitrário.

    (b) Considere o caso de $a = 2$. Tomando como aproximações iniciais $x_0 = 1, x_1 = 2$, verfique que as condições de convergência do método estão satisfeitas e efectue iterações até obter uma aproximação com três algarismos significativos.

15. Sabendo que $h(x)$ e $h'(x)$ são crescentes, diferenciáveis, e que h tem uma raiz no intervalo $I = [-1, 1]$, pretende-se determinar a raiz da equação

$$F(x) = x + h(x) = 0$$

usando o seguinte método

$$x_0 = a,\ x_1 = b, \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})F(x_n)}{F(x_n) - F(x_{n-1})}.$$

Verifique que F tem uma raiz única em I e que existem valores a, $b \in I$ para os quais o método converge. Que pode dizer relativamente à ordem de convergência?
(Exame 22.07.96)

16. (a) Considere a equação

$$e^x - 4x^2 = 0 \qquad \text{(E)}$$

e prove que ela tem apenas três raízes reais: $z_1 < z_2 < z_3$, tal que $z_1 \in [-1, 0]$, $z_2 \in [0, 1]$ e $z_3 \in [4, 5]$.

    (b) Para aproximar as raízes positivas da equação (E), considere-se o método do ponto fixo com função iteradora

$$g(x) = \frac{1}{2}\, e^{(x/2)}$$

    i. Mostre que z_2 e z_3 são pontos fixos de g.
    ii. Mostre que o método iterativo associado a g converge para z_2, qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \in [0, 1]$.
    iii. Mostre que não é possível usar esse método para obter uma aproximação da raiz $z_3 \in [4, 5]$.

(*EXAME de 28.07.97*)

17. Considere o método de Newton para aproximar a raiz $z_3 \in [4, 5]$ de (E).

(a) Prove que está assegurada a convergência do método de Newton, qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \in [4.1, 4.4]$. Determine ainda a **ordem de convergência** do método.

(b) Partindo de $x_0 = 4.1$, calcule x_1.
Sem efectuar mais iterações, determine um majorante para $|z_3 - x_2|$.
(*EXAME de 28.07.97*)

Capítulo III
Sistemas de equações

III.1 - Condicionamento de sistemas lineares

1. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{bmatrix}$$

e considere o sistema $Ax = b$, com $b = [1 \ 10^{-6}]^T$, que tem por solução exacta $x = [1 \ 1]^T$.

(a) Determine cond(A) na norma $|| \ \ ||_\infty$.

(b) Considere o sistema $A\tilde{x} = \tilde{b}$, onde $\tilde{b} = [1+\epsilon, \quad 10^{-6}]^T$. Obtenha

$$||\delta_b||_\infty = \frac{||b-\tilde{b}||_\infty}{||b||_\infty} \quad \text{e} \quad ||\delta_x||_\infty = \frac{||x-\tilde{x}||_\infty}{||x||_\infty}.$$

Comente.

(c) Considere ainda o sistema $A\bar{x} = \bar{b}$, onde $\bar{b} = [1, \quad 2 \times 10^{-6}]^T$. Obtenha $||\delta_b||_\infty$ e $||\delta_x||_\infty$. Comente.

2. Seja A a matriz do problema 8 (I) do capítulo I:

$$A = \begin{bmatrix} 0.00005 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Determine o número de condição da matriz A na norma $||.||_1$;

(b) Ao resolver um sistema com a matriz A, sabendo-se que o segundo membro é afectado por um erro cuja norma, em termos relativos, satisfaz $\|\delta b\|_1 \leq \epsilon$, determine um majorante da norma correspondente do erro relativo da solução.

3. Seja A a matriz real
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ a & 0 & 3 \end{bmatrix},$$
onde $a \in \mathbf{R}$. Suponhamos que, ao resolver o sistema $A\,x = b$, com um certo valor de a, se obteve a solução $\tilde{x} = (1,1,1)$. Supondo que o valor de a está afectado de um certo erro, de valor absoluto não superior a ϵ, determine um majorante de $\|\Delta x\|_\infty$, onde Δx é a diferença entre a solução obtida e a que se obteria se fosse conhecido o valor exacto de a.

4. Seja A uma matriz quadrada, de dimensão n, com a forma
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
   (a) Calcule A^{-1}.
   (b) Determine os números de condição $cond_1(A)$ e $cond_\infty(A)$.
   (c) Sejam b_1 e b_2 dois vectores de $\mathbf{R^n}$ tais que
   $$\frac{\|b_1 - b_2\|_\infty}{\|b_1\|_\infty} \leq 10^{-5}.$$
   Sejam x_1 e x_2, respectivamente, as soluções dos sistemas $A\,x = b_1$ e $A\,x = b_2$. Determine um majorante de
   $$\frac{\|x_1 - x_2\|_\infty}{\|x_1\|_\infty}$$
   no caso de $n = 20$. Comente.

III.2 - Métodos iterativos para sistemas lineares

1. O sistema de equações lineares, $A\,x = b$,
$$\begin{bmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$
pode, sob certas condições, ser resolvido pelo método iterativo
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -w\,a & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 1-\omega & \omega\,a \\ 0 & 1-\omega \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(k)} + \omega\,\mathbf{b}$$

(a) Para que valores de a o método converge se $\omega = 1$?

(b) se $a = -1/2$ e $\omega = 1/2$ o método converge ?

2. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 & + & 10x_2 & + & x_3 & = & 12 \\ x_1 & + & x_2 & + & 10x_3 & = & 12 \\ 10x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 12 \end{cases}$$

(a) Reordene as linhas de modo a que matriz do novo sistema tenha a diagonal estritamente dominante.

(b) Aplique o método de Jacobi ao novo sistema e efectue 4 iterações. Calcule um majorante para o erro na 4 iterada. Considere $\mathbf{x}^{(0)} = [-4, -4, -4]^T$.

(c) Aplique o método de Gauss-Seidel até que $||\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}|| < 10^{-2}$. Conclua sobre o erro da iterada $\mathbf{x}^{(k)}$.

3. Considere um sistema de duas equações na forma geral:

$$(I) \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & b_2 \end{cases}$$

onde $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$

(a) Mostre que os métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel convergem para qualquer aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$ se e só se $|m| < 1$, onde $m = \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}$.

(b) No caso do método de Jacobi, mostre que se a matriz do sistema tiver a diagonal estritamente dominante, por linhas, se verifica

$$||\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}||_\infty \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} ||\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}||_\infty$$

onde $\mathbf{x}$ é a solução do sistema, $\mathbf{x}^{(k)}$ é a k-ésima iterada e $\alpha = max\left(\frac{|a_{12}|}{|a_{11}|}, \frac{|a_{21}|}{|a_{22}|}\right)$.

(c) Considere o sistema

$$\begin{cases} 3x & + & y & = & 8 \\ x & + & 2y & = & 4 \end{cases}$$

Efectue a primeira iteração do método de Jacobi, partindo da aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [2, 1]^T$. Com base na alínea (b), determine um majorante do erro do resultado obtido.

(d) Nas condições da alínea anterior, quantas iterações do método de Jacobi são necessárias para garantir que seja satisfeita a condição $||\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}||_\infty < 0.001$?

4. Pretende-se resolver um certo sistema $Ax = b$, onde $\mathbf{A}$ é uma matriz triangular superior, partindo de uma aproximação inicial arbitrária.

(a) Se aplicarmos o método de Gauss-Seidel, podemos garantir que a solução exacta é obtida com um número finito de iterações .Justifique e diga quantas.

(b) A mesma pergunta, em relação ao método de Jacobi.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

5. Considere o sistema $Ax = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 & 8 \\ 2 & -7 & -10 \\ 10 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ -23 \\ 34 \end{bmatrix}$$

(a) É possível reordenar as linhas do sistema de modo que os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel sejam convergentes? Justifique.

(b) Escreva o sistema na forma iterativa e determine 4 iteradas do método de Gauss-Seidel com $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 1, 1]^T$.

6. Considere o seguinte sistema linear $Ax = b$,onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Verifique que este sistema pode ser resolvido por um processo iterativo da forma

$$x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + C$$

Identifique a matriz B e o vector C. Se $x^{(0)} = [0, 0, 0, 0]^T$ estime a norma do erro de $x^{(n)}$.

7. Considere o sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + z & = & 2 \\ -x + y & = & 0 \\ x + 2y - 3z & = & 0 \end{array} \right. .$$

(a) Prove que o método de Jacobi converge para a solução exacta deste sistema, qualquer que seja a aproximação inicial.

(b) Mostre que, no caso de se usar o método de Gauss-Seidel, não está garantida a convergência para qualquer aproximação inicial. Indique uma aproximação inicial $x^{(0)}$ (diferente da solução exacta), tal que a sucessão $\{x^{(k)}\}$ seja convergente; e uma aproximação inicial $\tilde{x}^{(0)}$, partindo da qual o método divirja.

III.3 Métodos iterativos para sistemas não-Lineares

1. Pretende-se resolver pelo método de Newton o seguinte sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2(x_3+1) & = 10 \\ 3(x_2+1) + x_3^2 & = 11 \\ 3x_1 + x_3^2 & = 9 \end{cases}$$

tomando como aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [3\ 2\ 1]^T$.

   (a) Mostre que o sistema linear $\mathbf{Av} = \mathbf{b}$ a ser resolvido para se obter $\mathbf{x}^{(1)}$ é tal que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

   Obtenha ainda o vector $\mathbf{b}$.

   (b) Resolva o sistema linear obtido em **2.a)**, pelo método de eliminação de Gauss com **pesquisa parcial de pivot**, e obtenha $\mathbf{x}^{(1)}$.

(*EXAME 28.07.97*)

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

2. Pretende-se resolver pelo método de Newton o sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} e^x - 3 = 0 \\ 3y + 4z = 3 \\ 2x^2 + 2x + 2z = 1 \end{cases}$$

   (a) Tomando como aproximação inicial $[x_0, y_0, z_0]^T = [0, 1, 2]^T$, ao efectuar uma iteração pelo método de Newton, somos conduzidos a resolver um certo sistema de equações lineares. Qual?

   (b) Resolva o sistema de equações lineares obtido na alínea anterior, utilizando o método de Gauss-Seidel, considerando como aproximação inicial o vector nulo e efectuando duas iterações.
   (*EXAME 09.07.92*)

3. Considere o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\begin{cases} x^3 + 5y - 2z = 0 \\ e^y - z^2 = 1 \\ -x^2 + y + z = \mu, \end{cases}$$

onde μ é um número real conhecido, próximo de 0. Para aproximar uma solução deste sistema pretende-se utilizar o método de Newton. Tomando como aproximação inicial o vector $\mathbf{x}^{(0)} = (c, 0, 0)$, onde c é um certo número real, para obter a aproximação $\mathbf{x}^{(1)}$ somos levados a resolver um sistema linear com a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3c^2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2c & 1 & 1. \end{bmatrix}$$

(a) Mostre como se obteve esta matriz e calcule o segundo membro do sistema.

(b) Factorize a matriz pelo método de Doolittle e diga para que valores de c o sistema linear considerado tem solução única.

(c) No caso de $c = 1$, resolva o sistema pelo método de Doolittle e calcule $\mathbf{x}^{(1)}$ (primeira iterada do método de Newton).

(d) No caso de se aplicar o método de Jacobi para resolver o sistema linear, diga para que valores de c está garantida a condição necessária e suficiente de convergência do método.

Capítulo IV
Aproximação de funções

IV.1 - Interpolação

1. Na tabela seguinte são apresentados valores (exactos) da função

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$$

x	0.8	1.0	1.6
$f(x)$	1.890	2.000	3.185

(a) Obtenha a expressão do polinómio interpolador de f nos três pontos tabelados, através da fórmula de Lagrange.

(b) Idem, mas através da fórmula de Newton.

(c) Calcule o valor interpolado para $x = 1.3$. Obtenha um majorante do erro a partir da expressão do erro de interpolação e compare-o com o erro efectivamente cometido.

2. Considere a seguinte tabela de valores:

x_i	-3	-1	1	3
f_i	-33	14	-2	-5

(a) Sabendo que a função tabelada é contínua e estritamente monótona em $[-1, 3]$,determine por interpolação inversa o zero da função situado no intervalo $[-1, 1]$, utilizando o maior número possível de pontos. Justifique a escolha dos nós de interpolação .

(b) Obtenha o polinómio interpolador de f nos três últimos pontos. Se determinasse o zero deste polinómio no intervalo $[-1, 1]$, obteria o mesmo resultado que na alínea anterior? Justifique.

(c) Supondo que, para $x \geq -1$, a função é da forma

$$f(x) = 3x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

e que $f[-1, 1, 2] = 4$, escreva, recorrendo ao polinómio interpolador calculado na alínea anterior, uma expressão que permita obter $f(x)$.

3. Considere a seguinte tabela de valores da função $f(x) = \log_{10} x$:

x_i	2.0	2.5	3.0
$\log_{10} x_i$	0.30103	0.39794	0.47712

(a) Usando a fórmula de Newton e todos os pontos da tabela, calcular uma aproximação de$f(2.4)$.

(b) Determine um majorante do erro absoluto cometido ao aproximar $f(x)$, pelo método utilizado na alínea anterior, quando $x \in [2, 3]$.Compare com o erro do resultado obtido para $x = 2.4$.

4. Pretende-se construir uma tabela de valores da função e^x, para $x \in [0, 1]$, com pontos igualmente espaçados $x_j = jh$, $j = 0, 1, \cdots, N$, onde h é o espaçamento entre os pontos. Em cada subintervalo $[x_j, x_{j+1}]$ a função é aproximada pelo polinómio interpolador de grau ≤ 1 nos pontos x_j, x_{j+1}. Determine o valor máximo do espaçamento h para que o erro de interpolação em qualquer ponto do intervalo $[0, 1]$ seja inferior a 10^{-6}.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

5. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f

x_i	0.2	0.34	0.4	0.52	0.6	0.72
f_i	0.16	0.22	0.27	0.29	0.32	0.37

(a) Obter $f(0.47)$ usando um polinómio de grau 2.

(b) Admitindo que $f \in C^3([0, 1])$e que $\max_{x \in [0,1]} |f^{(3)}(x)| = M$, calcule um majorante do erro do resultado obtido na alínea anterior.

6. Sejam $l_0(x)$, $l_1(x)$,..., $l_n(x)$ os polinómios de Lagrange de grau n associados aos nós x_0, x_1,..., x_n

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Considere a função

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) - 1$$

Prove que

(a) g é um polinómio de grau $\leq n$.

(b) $g(x_i) = 0$, $i = 0, 1, ..., n$.

(c) $g(x) = 0$, para todo o x.

(*EXAME 18.01.93*)

IV.2 - Método dos mínimos quadrados

1. Considere a seguinte tabela:

x_i	1.0	1.2	1.5	1.6
f_i	5.44	6.64	8.96	9.91

(a) Obtenha o polinómio do 1^o grau que se ajusta (no sentido dos mínimos quadrados) aos pontos tabelados.

(b) Idem, mas para o polinómio do 2^o grau. Utilizando o polinómio obtido, determine uma estimativa do valor de $f(1.4)$.

(c) Admitindo que $|f'(x) - g'(x)| \leq M, \forall x \in [1.2, 1.5]$ obtenha um majorante do erro absoluto do valor obtido na alínea anterior. SUGESTÃO: use o Teorema de Lagrange

(d) Relativamente aos dois casos anteriores, calcule o valor das somas dos quadrados dos desvios correspondentes aos ajustamentos efectuados. Qual seria o valor dessa soma, no caso de se fazer o ajustamento por um polinómio do 3^o grau?

2. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	6	3	2	1

Pretende-se um ajustamento dos pontos da tabela por uma função do tipo

$$g(x) = \frac{1}{Ax + B}.$$

Determine as constantes A, B pelo método dos mínimos quadrados. (*sugestão: poderá ser conveniente efectuar uma mudança de variáveis*)

(*EXAME 18.01.93*)

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

3. Determine a função da forma

$$g(x) = Be^{x} + Ce^{-x}$$

que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, à seguinte tabela de valores

x_i	0	0.5	1.0
f_i	5.0	5.2	6.5

Para simplificar os cálculos, escreva os elementos da matriz usando arredondamento simétrico e uma casa decimal.

(*EXAME 8.07.94*)

4. Seja f tal que $f(-2) = 3$, $f(0) = 6$ e $f(2) = 15$. Obtenha a função do tipo $g(x) = ax + b$ que melhor se ajusta aos valores dados, no sentido dos mínimos quadrados. Mostre ainda que

$$\sum_{i=1}^{3} \left(f(x_i) - \alpha x_i - \beta\right)^2 \geq 6$$

quaisquer que sejam α, β constantes reais. (*EXAME 06.07.92*)

Capítulo V
Integração numérica

1. Considere o integral
$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$
   (a) Determine o seu valor aproximado, considerando quatro subintervalos e utilizando:
      i. A regra dos trapézios.
      ii. A regra de Simpson.
   (b) Faça uma estimativa do número mínimo de subintervalos que se deveria considerar,se se pretendesse calcular o integral da alínea anterior com um erro inferior a 10^{-4}, utilizando
      i. A regra dos trapézios.
      ii. A regra de Simpson.

2. Pretende-se obter uma fórmula de integração com dois nós no intervalo $[-1, 1]$, i.e. uma fórmula do tipo:
$$I_1(f) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$
   (a) Escreva o sistema de equações que lhe permite calcular A_0 e A_1 de modo a que a fórmula seja, pelo menos, de grau 1.
   (b) Resolva o sistema em ordem a A_0 e A_1.
   (c) Mostre que, se x_0 e x_1 forem tais que $x_0 x_1 = -\frac{1}{3}$, a fórmula de integração assim, obtida tem, pelo menos, grau 2.

3. Suponha que a função f é definida no intervalo $[0, a]$, do seguinte modo
$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & 0 \leq x \leq 1 \\ 3x - 1 & 1 \leq x \leq a \end{cases}$$
   (a) Obtenha aproximações para o integral $I(f) = \int_0^a f(x)dx$, com $a = 2$ e $a = 3$, dos seguintes modos:
      i. Utilizando a regra dos trapézios composta, com passo $h = 1$.
      ii. Utilizando a regra de Simpson (simples).
   (b) Determine o erro de cada um dos resultados obtidos, comparando com o valor exacto de $I(f)$.
   (c) A fórmula do erro da regra dos trapézios é aplicável neste caso ? E a da regra de Simpson ? Justifique.

4. Demonstre que na regra de integração do ponto médio se tem:

$$\int_{x_0-\frac{h}{2}}^{x_0+\frac{h}{2}} f(x)dx = hf(x_0) + E(f),$$

onde $E(f) = \frac{h^3 f''(\theta)}{24}$ e $\theta \in (x_0 - \frac{h}{2}, x_0 + \frac{h}{2})$.

5. Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f(x)$

x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1	0	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

(a) Utilizando a fórmula de Newton com diferenças divididas, determine o polinómio de grau ≤ 2, $p_2(x)$, que interpola $f(x)$ nos pontos $x_0 = -2$, $x_2 = 0$ e $x_4 = 2$.

(b) Suponha que pretendemos aproximar o valor $I(f) = \int_{-2}^{2} f(x)dx$ por $\int_{-2}^{2} p_2(x)dx$. Sabendo que as derivadas de f verificam $|f^{(j)}(x)| \leq j/2$, $j = 1, 2, 3, 4$ no intervalo $[-2, 2]$, determine um majorante para o erro de integração. Justifique.

(*EXAME 4.07.97*)

6. Pretende-se construir uma fórmula de quadratura do tipo

$$Q(g) = A_0 g(0) + A_1 g(1)$$

para aproximar o integral

$$I = \int_0^1 e^x \; g(x)dx.$$

(a) Calcule A_0 e A_1 de modo a que a fórmula seja exacta para funções $g(x) = a + bx$ (a e b reais).

(b) Seja $g(x) = sin\, x$. Obtenha uma aproximação de I usando a regra de quadratura obtida em a) e calcule uma estimativa do erro absoluto.

(c) Determine um valor aproximado para I usando a regra dos Trapézios composta com **4 subintervalos**.

(d) Determine o número mínimo de subintervalos necessário na regra dos Trapézios composta, para garantir que o erro absoluto do resultado seja inferior a 10^{-2} (despreze erros de arredondamento).

7. A tabela seguinte mostra os resultados obtidos por uma regra de Newton-Cotes (composta) no cálculo do integral $I(f)$ de uma certa função f indefinidamente diferenciável.

n	8	16	32	64
I_n	295.27	274.15	268.97	267.68

O valor I_n representa a **aproximação** obtida, com $n + 1$ nós de integração. Sabendo que o **valor exacto** do integral $I(f) = 267.25$, diga, justificando, que fórmula poderá ter sido utilizada (Trap. ou Simp.).

Capítulo VI
Métodos numéricos para equações diferenciais ordinárias

1. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} &y'(x) = 1 - x + 4y(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ &y(0) = 1, \end{aligned}$$

com solução exacta $y(x) = x/4 - 3/16 + (19/16)e^{4x}$.

   (a) Obtenha um valor aproximado y_2 para $y(0.2)$ usando o método de Euler com passo $h = 0.1$.

   (b) Recorrendo a um resultado teórico, deduza um majorante para $|y(0.2) - y_2|$. Compare com o valor do erro de facto cometido.

   (c) Utilize o método de Taylor de ordem 2, com $h = 0.1$, para obter uma aproximação de $y(0.2)$. Compare com o resultado obtido em a).

2. Utilize o método de Runge-Kutta de ordem 2 (método do ponto médio) para obter uma aproximação da solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = x + y(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

no ponto $x = 0.1$ com espaçamentos $h = 0.1, 0.05, 0.025$. Sabendo que a solução exacta deste problema é dada por $y(x) = \exp(x) - 1 - x$, compare os resultados obtidos com o valor exacto de $y(0.1)$. Comente.

3. Dado o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = 1 - \dfrac{y(x)}{x}, \quad 2 \leq x \leq 3, \\ y(2) = 2 \end{cases}$$

determine um valor aproximado de $y(2.1)$ pelo método de Euler com $h = 0.1, 0.05, 0.025$.

4. Dado o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = 1 - x + 4y(x) \quad 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

obtenha uma aproximação de $y(0.2)$ usando o método de Runge-Kutta de ordem 4, com $h = 0.2$.

5. Dado o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = 0.04y(x), & 0 \leq x \leq 2, \\ y(0) = 1000 \end{cases}$$

com solução exacta $y(x) = \exp(0.04x)$, estime $y(1)$ pelos métodos de Taylor de ordem 2 e pelo método do ponto médio com $h = 1, 0.5, 0.25$. Com que método e com que espaçamento obteve uma melhor aproximaçao?

6. Verifique que o método do ponto médio quando aplicado ao problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = -20y(x), & 0 \leq x \leq 20, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

nos fornece

$$y_{n+1} = (1 - 20h + 200h^2)^{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

   (a) Aplique este método para obter uma solução aproximada de $y(10)$ e compare o resultado com o valor exacto, sabendo que a soluçao do problema anterior é $y(x) = \exp(-20x)$.

   (b) Se n for muito grande, o que acontece com a solução fornecida por este método de Runge Kutta?

EXERCÍCIOS PROPOSTOS EM EXAMES:

1. Considere a equação

$$f(x) = x^2 - \cos^2(x) = 0. \tag{3}$$

   (a) Mostre que a equação (1) tem (apenas) duas raízes.

   (b) Para resolver numericamente a equação (1) vai-se considerar um método do ponto fixo associado a uma função iteradora da forma $g(x) = x + A(x)(\cos(x) - x)$, onde $A(x)$ é uma função que nunca se anula.

      i. Mostre que as raízes da equação (1) e os pontos fixos de g coincidem para $x > 0$.

ii. Fazendo $A(x) = 1/2$, prove que o método do ponto fixo associado a g converge para a raiz z pertencente ao intervalo $[0, 1]$, qualquer que seja a aproximação inicial x_0 escolhida nesse intervalo.

iii. Utilizando o método obtido em a) e $x_0 = 1$, calcule uma aproximação x_{k+1} da raiz z, parando a iteração quando $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-3}$. Indique ainda uma estimativa para o erro $|z - x_{k+1}|$.

iv. Determine a ordem de convergência p do método e uma aproximação da constante K_∞, tal que seja verificada a igualdade assimptótica

$$|z - x_{m+1}| \approx K_\infty |z - x_m|^p, \qquad m \text{ suf. grande}$$

2. Considere a equação $F(x) = 0$, onde $F(x) = (x - \alpha)^m h(x)$, ($m > 1$ inteiro), com $h(\alpha) \neq 0$ e tal que h é uma função de classe C^2 num intervalo aberto contendo α. Prove que o método iterativo $x_{m+1} = g(x_m), m = 0, 1, \ldots$, em que

$$g(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)}$$

converge para α se a aproximação inicial x_0 estiver suficientemente próxima de α. Determine a ordem de convergência do método e o factor assimptótico da convergência.

3. Considere a equação

$$\sin(x) + 1 - ax = 0$$

onde a é um número real conhecido.

(a) Diga, justificando, para que valores de a esta equação tem uma única raiz no intervalo $I = [0, \frac{\pi}{2}]$.

(b) Para os valores de a considerados na alínea anterior, mostre que o método do ponto fixo, com a função iteradora $g(x) = \dfrac{1 + \sin(x)}{a}$, converge para a z, qualquer que seja $x_0 \in I$.

(c) No caso de $a = 2$, diga qual o número mínimo de iterações do método do ponto fixo que deverá efectuar para garantir que o erro absoluto da aproximação obtida seja inferior a 10^{-3} se x_0 é qualquer número em I.

(d) No caso de $a = 0$, mostre que a equação tem uma única raiz w no intervalo $[-\pi, 0]$. Mostre que, se x_0 estiver suficientemente próximo da raiz, então o método de Newton converge para z, e determine a ordem de convergência.

4. Considere a família de sucessões da forma

$$x_{m+1} = \frac{\lambda\, x_m + 1 - \sin(x_m)}{1 + \lambda}, \quad m = 0, 1, \ldots, \tag{4}$$

com λ parâmetro real.

(a) Faça $\lambda = 1$ e, usando o teorema do ponto fixo, mostre que a sucessão (1) converge para um certo valor real z, qualquer que seja x_0 pertencente ao intervalo $[0,1]$. Qual a ordem de convergência deste método iterativo ?

(b) Conclua, utilizando a questão anterior, que z é a única raiz da equação $1 - x - \sin x = 0$ no intervalo $[0,1]$. Utilizando o método obtido em a) e $x_0 = 1$, determine, sem efectuar iterações, qual o valor de k de modo que se tenha $|z - x_k| < 10^{-5}$.

(c) Como deveria ser λ por forma a sucessão (1) convergir para z o mais rápido possível? Qual a ordem de convergência nesse caso? **[1.0]**

5. Prove que, com $x_0 = 1$, o método de Newton aplicado à equação $1 - x - \sin x = 0$ converge para a única raiz z da equação .

6. Considere a família de funções da forma

$$g_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}\left[(\alpha - 1)x + \frac{78.8}{x}\right], \tag{5}$$

onde α é um parâmetro real.

(a) Mostre que os pontos fixos de g_α são as raizes da equação $x^2 - 78.8 = 0$, independentemente do valor do parâmetro α.

(b) Com o objectivo de aproximar a **raiz positiva** z dessa equação, considere a iteração do ponto fixo, $x_{m+1} = g_\alpha(x_m)$, associada a (5). A tabela seguinte mostra algumas iteradas das sucessões correspondentes aos valores $\alpha = 3/2$ e $\alpha = 1/2$, com iterada inicial $x_0 = 9$.

	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$
$x_{m+1} = g_{3/2}(x_m)$	8.837037	8.890356	?	8.78425	8.876441	8.877102
$x_{m+1} = g_{1/2}(x_m)$	8.51111	10.00586	5.74491	21.68807	-14.42104	3.49320

i. No caso de $\alpha = 3/2$, preencha o espaço em branco (obtenha x_3). Diga o que indicam os resultados, no que respeita à convergência ou divergência das sucessões para a raiz z acima referida. **Confirme teoricamente**, em cada caso.

ii. No caso de $\alpha = 3/2$, ob obtenha um majorante para o erro absoluto da iterada x_3.

iii. Como deveria escolher α de modo a obter convergência quadrática, supondo x_0 suf. próximo de z ?

7. Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f(x)$

x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1	0	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

(a) Utilizando a fórmula de Newton com diferenças divididas, determine o polinómio de grau ≤ 2, $p_2(x)$, que interpola $f(x)$ nos pontos $x_0 = -2$, $x_2 = 0$ e $x_4 = 2$.

(b) Suponha que pretendemos aproximar o valor $I(f)=\int_{-2}^{2} f(x)dx$ por $\int_{-2}^{2} p_2(x)dx$. Sabendo que as derivadas de f verificam $|f^{(j)}(x)| \leq j/2,\ j=1,2,3,4$ no intervalo $[-2,2]$, determine um majorante para o erro de integração. Justifique.

(c) Determine uma aproximação para $I(f)=\int_{-2}^{2} f(x)dx$ usando a regra de Simpson composta e todos os pontos da tabela.

8. Considere-se a função f dada pela tabela

x_i	0	1	2
f_i	1	1	2

a) Obtenha um valor aproximado de $f(1.5)$ utilizando:

i) um spline de grau 1.

ii) um polinómio interpolador de grau 2.

ii) Sabendo que f é um polinómio do tipo

$$f(x)=a\,x^3+b\,x^2+c\,x+d,$$

determine uma expressãodo erro da última aproximação obtida, em função dos coeficientes de f.

b. Obtenha a função g, do tipo $g(x)=\beta\,x(x-1)+\alpha$, que melhor se ajusta a f (dada na tabela acima), no sentido dos mínimos quadrados. **3.** Pelo método dos coeficientes indeterminados, pretende-se obter uma fórmula de quadratura do tipo

$$I_Q(f)\ =\ A_0 f(0)+A_1 f(1)+A_2 f(2)$$

que lhe permita calcular o integral $I(f)=\int_{-1}^{3} f(x)dx$.

i) Obtenha os parâmetros A_0, A_1 e A_2 de modo que $I_Q(f)$ tenha grau de precisão $r \geq 2$.

ii) Obtenha o valor aproximado do integral, no caso de f ser a função tabelada.

iii) Seja f um polinómio de grau nãosuperior a 3. Prove que o valor obtido pela regra considerada na alínea **a)** é o mesmo que se obteria pela regra de Simpson.

FORMULÁRIO

2 Resolução de Equações não lineares

Métodos Iterativos

Método da secante:

$$x_{m+1} = x_m - f(x_m)\frac{x_m - x_{m-1}}{f(x_m) - f(x_{m-1})}$$

$$e_{m+1} = -\frac{f''(\xi_m)}{2f'(\eta_m)}e_{m-1}e_m$$
$$\eta_m \in \text{int}(x_{m-1}, x_m) \qquad \xi_m \in \text{int}(x_{m-1}, x_m, z)$$

Método de Newton:

$$x_{m+1} = x_m - \frac{f(x_m)}{f'(x_m)}$$

$$e_{m+1} = -\frac{f''(\xi_m)}{2f'(x_m)}e_m^2 \qquad \xi_m \in \text{int}(z, x_m)$$

Método do ponto fixo:

$$x_{m+1} = g(x_m)$$

$$|e_{m+1}| \leq L|e_m|$$

$$|e_{m+1}| \leq \frac{L}{1-L}|x_{m+1} - x_m|$$

$$e_{m+1} = \frac{(-1)^{p-1}g^{(p)}(\xi_m)}{p!}e_m^p \qquad \xi_m \in \text{int}(z, x_m)$$
$$g^{(r)}(z) = 0 \qquad r = 0, \ldots, p-1 \qquad g^{(p)}(z) \neq 0$$

3 Resolução de Sistemas

Sistemas Lineares

Normas e Condicionamento:

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = (\rho(\mathbf{A}^T\mathbf{A}))^{1/2}$$

$$cond(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{A}^{-1}\|$$

$$||\delta_{\mathbf{x}}|| \leq cond(\mathbf{A})\ ||\delta_{\mathbf{b}}||$$

Métodos Iterativos para Sist. Lineares

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}$$
$$\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)})$$
$$\mathbf{M}\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{b} - \mathbf{N}\mathbf{x}^{(k)}, \quad \mathbf{C} = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$$

Método de Jacobi:

$$x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)})/a_{ii}$$

Método de Gauss-Seidel:

$$x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)})/a_{ii}$$

Métodos Iterativos para Sist. Não-Lineares

Método de Newton:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}^{(k)} \qquad \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})\Delta\mathbf{x}^{(k)} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})$$

4 Aproximação de funções

4.1 Interpolação Polinomial

Fórmula de Lagrange:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i\ l_i(x)$$

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n}(\frac{x - x_j}{x_i - x_j})$$

Fórmula de Newton com dif. divididas:

$$p_n(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} f[x_0, \ldots, x_i](x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})$$

$$e_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i), \quad \xi \in \text{int}(x_0, \ldots, x_n, x)$$

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\eta)}{k!}$$

4.2 Mínimos Quadrados

$$\begin{bmatrix} (\phi_0,\phi_0) & \ldots & (\phi_0,\phi_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (\phi_m,\phi_0) & \ldots & (\phi_m,\phi_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \ldots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\phi_0, f) \\ \ldots \\ (\phi_m, f) \end{bmatrix}$$

5 Integração Numérica

Regra dos trapézios:

$$T(f) = (\frac{b-a}{2})[f(a)+f(b)]$$

$$E^T(f) = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi) \qquad \xi \in (a,b)$$

$$T_N(f) = h\left[(f_0+f_N)/2 + \sum_{i=1}^{N-1} f_i\right]$$

$$E_N^T(f) = -\frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{N} f''(\xi_i) = -\frac{Nh^3}{12}f''(\xi) \qquad \xi \in (a,b)$$

Regra de Simpson:

$$S(f) = \frac{h}{3}[f(a)+4f(a+h)+f(b)] = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

$$E^S(f) == -\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi) = -\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \frac{1}{90}f^{(4)}(\xi) \qquad \xi \in (a,b)$$

$$S_N(f) = \frac{h}{3}\left[(f_0+f_N) + 4\sum_{i=1}^{N/2} f_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{N/2-1} f_{2i}\right]$$

$$E_N^S(f) = -\frac{h^5}{90}\sum_{i=1}^{N/2} f^{(4)}(\xi_i) = -\frac{Nh^5}{180}f^{(4)}(\xi) \qquad \xi \in (a,b)$$

6 Métodos numéricos para equações diferenciais

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n,y_n) \quad \textbf{(Método de Euler)}$$

$$T_{n+1} = \frac{h^2}{2}y''(\xi_n) \quad \xi_n \in (x_n,x_{n+1}), \quad |e_n| = |y(x_n)-y_n| \le \frac{hY_2}{2K}\left(e^{K(x_n-x_0)}-1\right).$$

Métodos de Runge-Kutta de ordem 2:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n+\frac{h}{2}, y_n+\frac{h}{2}f(x_n,y_n)) \quad \textbf{(Método do ponto médio (ou Euler modificado))}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_n+hf(x_n,y_n))] \quad \textbf{(Método de Heun)}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}[f(x_n,y_n)+3f(x_n+\frac{2}{3}h, y_n+\frac{2}{3}hf(x_n,y_n))]$$

Método de Runge-Kutta de ordem 4:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(V_1+2V_2+2V_3+V_4)$$

$$V_1 = f(x_n,y_n) \quad V_2 = f(x_n+\frac{h}{2}, y_n+\frac{h}{2}V_1)$$

$$V_3 = f(x_n+\frac{h}{2}, y_n+\frac{h}{2}V_2) \quad V_4 = f(x_n+h, y_n+hV_3)$$