

Trabalhos de ANÁLISE NUMÉRICA

(Lic. Engenharia Ambiente)

Prazo de Entrega: 8 de Junho de 2001

Limite de páginas = 20.

Trabalho I.

Seja c uma função que representa a concentração de um poluente no ar, em função de uma variável espacial x e do tempo t . Através de difusão e transporte do poluente pelo vento, que se propaga com velocidade V , constante, a concentração é modelada pela equação de advecção-difusão

$$\frac{\partial c}{\partial t}(x, t) + V \frac{\partial c}{\partial x}(x, t) = \kappa \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x, t),$$

onde $\kappa \geq 0$ é uma constante relacionada com a difusão do poluente na atmosfera.

Admitimos que num tempo inicial a concentração do poluente é dada por $c(x, 0) = c_0(x)$ e pretendemos determinar qual a concentração do poluente num tempo T . Para esse efeito é comum utilizar esquemas de diferenças finitas, discretizando o espaço e o tempo, considerando $x_n = nh_x$ e $t_m = mh_t$, em que h_x, h_t são valores pequenos. Iremos considerar um esquema de diferenças finitas que consiste em aproximar

$$\frac{\partial c}{\partial t}(x, t) \approx \frac{c_{n,m+1} - c_{n,m}}{h_t}, \quad \frac{\partial c}{\partial x}(x, t) \approx \frac{c_{n,m} - c_{n-1,m}}{h_x}, \quad \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x, t) \approx \frac{c_{n+1,m} - 2c_{n,m} + c_{n-1,m}}{h_x^2}$$

onde $c_{n,m} = c(x_n, t_m)$. Obtemos assim a relação

$$\frac{c_{n,m+1} - c_{n,m}}{h_t} + V \frac{c_{n,m} - c_{n-1,m}}{h_x} = \kappa \frac{c_{n+1,m} - 2c_{n,m} + c_{n-1,m}}{h_x^2}$$

e podemos escrever o esquema *upwind*

$$c_{n,m+1} = c_{n,m} - Vh_t \frac{c_{n,m} - c_{n-1,m}}{h_x} + \kappa h_t \frac{c_{n+1,m} - 2c_{n,m} + c_{n-1,m}}{h_x^2}.$$

Esta fórmula permite obter o valor das concentrações em tempos t_{m+1} a partir dos valores num tempo t_m , começando com $t_0 = 0$, onde conhecemos a concentração inicial. Há que ter o cuidado de exigir que a relação entre h_t e h_x seja adequada (senão podem existir problemas de estabilidade numérica, mas isso sai fora do âmbito elementar do trabalho, e pode ser constatado em a)-(iii)).

1. Considere $V = 4, \kappa = 1$, e que a concentração inicial do poluente é

$$c_0(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{se } |x| \geq 2 \\ 0 & \text{se } |x| < 2 \end{cases}$$

Pretende-se saber qual os valores da concentração na região definida pelo intervalo $\mathcal{R} = [0, 15]$.

a) Determine qual o valor aproximado de $c(x, T)$ quando $x \in \mathcal{R}, T = 2$,

(i) usando $h_x = 0.1, h_t = 0.004$.

(ii) usando $h_x = 0.1, h_t = 0.001$.

(iii) usando $h_x = 0.1, h_t = 0.005$.

Verifique que em (iii) a aproximação é incorrecta devido a instabilidade do esquema.

b) Pretendendo que $c(5, 1) = 1.5$, determine um valor de κ conveniente (com 4 dígitos). Para esse efeito, considere o esquema com os valores $h_x = 0.25, h_t = 0.005$ e aplique o método da secante, começando com dois valores iniciais para κ , entre 1 e 4.

2. Considere os valores obtidos com $\kappa = 1$, por a)-(i), em $c(0, 2), c(2, 2), c(4, 2), c(6, 2), c(8, 2), c(10, 2)$.

a) Determine o polinómio interpolador, e obtenha um valor aproximado por esse polinómio para $c(5, 2)$.

b) Como os valores obtidos pelo esquema têm erros e_0, e_2, \dots, e_{10} , determine uma estimativa para a influência desses erros no valor aproximado $c(5, 2)$.

c) Faça a aproximação por mínimos quadrados com um polinómio do segundo grau, obtendo o valor aproximado para $c(5, 2)$. Comente face aos valores obtidos em a), comparando com o valor que é obtido pelo esquema.