Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática – **Instituto Superior Técnico**

Trabalhos de ANÁLISE NUMÉRICA

(Lic. Engenharia Ambiente)
Prazo de Entrega: 8 de Junho de 2001
Limite de páginas = 20.

Trabalho II.

Seja c uma função que representa a concentração de um poluente no ar, em função de uma variável espacial x e do tempo t. Através de difusão e transporte do poluente pelo vento, que se propaga com velocidade V, constante, a concentração é modelada pela equação de advecção-difusão

$$\frac{\partial c}{\partial t}(x,t) + V\frac{\partial c}{\partial x}(x,t) = \kappa\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x,t),$$

onde $\kappa \geq 0$ é uma constante relacionada com a difusão do poluente na atmosfera.

Admitimos que num tempo inicial a concentração do poluente é dada por $c(x,0) = c_0(x)$ e pretendemos determinar qual a concentração do poluente num tempo T. Para esse efeito é comum utilizar esquemas de diferenças finitas, discretizando o espaço e o tempo, considerando $x_n = nh_x$ e $t_m = mh_t$, em que h_x, h_t são valores pequenos. Iremos considerar um esquema de diferenças finitas que consiste em aproximar

$$\frac{\partial c}{\partial t}(x,t) \approx \frac{c_{n,m+1} - c_{n,m}}{h_t},\ \frac{\partial c}{\partial x}(x,t) \approx \frac{c_{n,m} - c_{n-1,m}}{h_x},\ \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x,t) \approx \frac{c_{n+1,m} - 2c_{n,m} + c_{n-1,m}}{h_x^2}$$

onde $c_{n,m} = c(x_n, t_m)$. Obtemos assim a relação

$$\frac{c_{n,m+1} - c_{n,m}}{h_t} + V\frac{c_{n,m} - c_{n-1,m}}{h_x} = \kappa\frac{c_{n+1,m} - 2c_{n,m} + c_{n-1,m}}{h_x^2}$$

e podemos escrever o esquema *upwind*

$$c_{n,m+1} = c_{n,m} - Vh_t\frac{c_{n,m} - c_{n-1,m}}{h_x} + \kappa h_t\frac{c_{n+1,m} - 2c_{n,m} + c_{n-1,m}}{h_x^2}.$$

Esta fórmula permite obter o valor das concentrações em tempos t_{m+1} a partir dos valores num tempo t_m, começando com $t_0 = 0$, onde conhecemos a concentração inicial. Há que ter o cuidado de exigir que a relação entre h_t e h_x seja adequada (senão podem existir problemas de estabilidade numérica, mas isso sai fora do âmbito elementar do trabalho, e pode ser constatado em a)-(iii)).

1. Considere $V = 4, \kappa = 3$, e que a concentração inicial do poluente é

$$c_0(x) = \begin{cases} 4 & \text{se } |x| \leq 2 \\ 0 & \text{se } |x| > 2 \end{cases}$$

Pretende-se saber qual os valores da concentração na região definida pelo intervalo $\mathcal{R} = [0, 15]$.

a) Determine qual o valor aproximado de $c(x,T)$ quando $x \in \mathcal{R}, T = 2$,
(i) usando $h_x = 0.2$, $h_t = 0.005$.
(ii) usando $h_x = 0.2, h_t = 0.001$.
(iii) usando $h_x = 0.2, h_t = 0.007$.
Verifique que em (iii) a aproximação é incorrecta devido a instabilidade do esquema.

b) Pretendendo que $c(5,1) = 2.5$, determine um valor de κ conveniente (com 4 dígitos). Para esse efeito, considere o esquema com os valores $h_x = 0.2, h_t = 0.005$ e aplique o método da secante, começando com dois valores iniciais para κ, entre 1 e 3.

2. Considere os valores obtidos com $\kappa = 3$, por a)-(i), em $c(0,2), c(2,2), c(4,2), c(6,2), c(8,2), c(10,2)$.

a) Determine o polinómio interpolador, e obtenha um valor aproximado por esse polinómio para $c(5,2)$.

b) Como os valores obtidos pelo esquema têm erros $e_0, e_2, ..., e_{10}$, determine uma estimativa para a influência desses erros no valor aproximado $c(5,2)$.

c) Faça a aproximação por mínimos quadrados com um polinómio do segundo grau, obtendo o valor aproximado para $c(5,2)$. Comente face aos valores obtidos em a), comparando com o valor que é obtido pelo esquema.