

## Trabalhos de ANÁLISE NUMÉRICA

(Lic. Engenharia Ambiente)

Prazo de Entrega: 8 de Junho de 2001

Limite de páginas = 20.

### Trabalho IV.

Seja  $c$  uma função que representa a concentração de um poluente no ar, em função de uma variável espacial  $x$  e do tempo  $t$ . Através de difusão e transporte do poluente pelo vento, que se propaga com velocidade  $V$ , constante, a concentração é modelada pela equação de advecção-difusão

$$\frac{\partial c}{\partial t}(x, t) + V \frac{\partial c}{\partial x}(x, t) = \kappa \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x, t),$$

onde  $\kappa \geq 0$  é uma constante relacionada com a difusão do poluente na atmosfera.

Admitimos que num tempo inicial a concentração do poluente é dada por  $c(x, 0) = c_0(x)$  e pretendemos determinar qual a concentração do poluente num tempo  $T$ . Para esse efeito é comum utilizar esquemas de diferenças finitas, discretizando o espaço e o tempo, considerando  $x_n = nh_x$  e  $t_m = mh_t$ , em que  $h_x, h_t$  são valores pequenos. Iremos considerar um esquema de diferenças finitas que consiste em aproximar

$$\frac{\partial c}{\partial t}(x, t) \approx \frac{c_{n,m+1} - c_{n,m}}{h_t}, \quad \frac{\partial c}{\partial x}(x, t) \approx \frac{c_{n,m} - c_{n-1,m}}{h_x}, \quad \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x, t) \approx \frac{c_{n+1,m} - 2c_{n,m} + c_{n-1,m}}{h_x^2}$$

onde  $c_{n,m} = c(x_n, t_m)$ . Obtemos assim a relação

$$\frac{c_{n,m+1} - c_{n,m}}{h_t} + V \frac{c_{n,m} - c_{n-1,m}}{h_x} = \kappa \frac{c_{n+1,m} - 2c_{n,m} + c_{n-1,m}}{h_x^2}$$

e podemos escrever o esquema *upwind*

$$c_{n,m+1} = c_{n,m} - Vh_t \frac{c_{n,m} - c_{n-1,m}}{h_x} + \kappa h_t \frac{c_{n+1,m} - 2c_{n,m} + c_{n-1,m}}{h_x^2}.$$

Esta fórmula permite obter o valor das concentrações em tempos  $t_{m+1}$  a partir dos valores num tempo  $t_m$ , começando com  $t_0 = 0$ , onde conhecemos a concentração inicial. Há que ter o cuidado de exigir que a relação entre  $h_t$  e  $h_x$  seja adequada (senão podem existir problemas de estabilidade numérica, mas isso sai fora do âmbito elementar do trabalho, e pode ser constatado em a)-(iii) ).

1. Considere  $V = 10, \kappa = 2$ , e que a concentração inicial do poluente é

$$c_0(x) = \begin{cases} 5 & \text{se } x \in [-4, -1] \cup [1, 4] \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Pretende-se saber qual os valores da concentração na região definida pelo intervalo  $\mathcal{R} = [0, 15]$ .

a) Determine qual o valor aproximado de  $c(x, T)$  quando  $x \in \mathcal{R}, T = 1$ ,

(i) usando  $h_x = 0.2, h_t = 0.005$ .

(ii) usando  $h_x = 0.2, h_t = 0.001$ .

(iii) usando  $h_x = 0.15, h_t = 0.005$ .

Verifique que em (iii) a aproximação é incorrecta devido a instabilidade do esquema.

b) Pretendendo que  $c(10, 1) = 2.5$ , determine um valor de  $\kappa$  conveniente (com 4 dígitos). Para esse efeito, considere o esquema com os valores  $h_x = 0.25, h_t = 0.005$  e aplique o método da secante, começando com dois valores iniciais para  $\kappa$ , entre 1 e 2.

2. Considere os valores obtidos com  $\kappa = 1$ , por a)-(i), em  $c(0, 2), c(2, 2), c(4, 2), c(6, 2), c(8, 2), c(10, 2)$ .

a) Determine o polinómio interpolador, e obtenha um valor aproximado por esse polinómio para  $c(5, 2)$ .

b) Como os valores obtidos pelo esquema têm erros  $e_0, e_2, \dots, e_{10}$ , determine um majorante para a influência desses erros no valor aproximado  $c(5, 2)$ .

c) Faça a aproximação por mínimos quadrados com um polinómio do segundo grau, obtendo o valor aproximado para  $c(5, 2)$ . Comente face aos valores obtidos em a), comparando com o valor que é obtido pelo esquema.